

Exercice 1 - Vraies ou fausses

Déterminer parmi les propositions suivantes lesquelles sont vraies :

1. 136 est un multiple de 17 et 2 divise 167
2. 136 est un multiple de 17 ou 2 divise 167
3. $\exists x \in \mathbb{R}, (x + 1 = 0 \text{ et } x + 2 = 0)$
4. $(\exists x \in \mathbb{R}, x + 1 = 0)$ et $(\exists x \in \mathbb{R}, x + 2 = 0)$
5. $\forall x \in \mathbb{R}, (x + 1 \neq 0 \text{ ou } x + 2 \neq 0)$
6. $\exists a \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, |a| < \varepsilon$
7. $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in \mathbb{R}, |a| < \varepsilon$
8. $\exists x \in \mathbb{R}^*, \forall y \in \mathbb{R}^*, \forall z \in \mathbb{R}^*, z - xy = 0$
9. $\forall y \in \mathbb{R}^*, \exists x \in \mathbb{R}^*, \forall z \in \mathbb{R}^*, z - xy = 0$
10. $\forall y \in \mathbb{R}^*, \forall z \in \mathbb{R}^*, \exists x \in \mathbb{R}^*, z - xy = 0$

Exercice 2 - Du texte aux quantificateurs

Ecrire à l'aide des quantificateurs les assertions suivantes, et préciser si elles sont vraies ou fausses.

1. Le carré de tout nombre réel est positif ou nul.
2. Certains nombres réels sont plus grands que leurs carrés.
3. Tout entier naturel est strictement inférieur à au moins un réel positif.

Exercice 3 - Du texte aux quantificateurs (encore !)

Soient f et g deux fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :

- | | |
|-------------------------------|-------------------------------------|
| 1. f s'annule. | 7. f n'est pas la fonction nulle. |
| 2. f ne s'annule jamais. | 8. f est constante |
| 3. f est inférieure à g | 9. f n'est pas constante |
| 4. f est positive. | 10. f est majorée par 57 |
| 5. f n'est pas positive. | 11. f est majorée. |
| 6. f est la fonction nulle. | 12. f est périodique. |

Exercice 4 - Du quantificateur au texte

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

Énoncer en langage courant les assertions suivantes écrites à l'aide de quantificateurs. Pour chaque assertion, peut-on trouver une fonction qui la satisfait ? Qui ne la satisfait pas ?

- | | |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------|
| 1. $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$ | 3. $\exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = c$ |
| 2. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x \geq y \implies f(x) \geq f(y)$ | 4. $\exists T \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(x + T)$ |

Exercice 5 - Nier des assertions avec quantificateurs

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Nier les assertions suivantes :

- | | |
|----------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|
| 1. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq 1$ | 3. $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq f(x) \leq 1$ |
| 2. $\exists x \in \mathbb{R}_+, f(x) \geq 0$ | 4. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 1 \text{ ou } f(x) \leq -1$ |

Exercice 6 - Vrai ou faux et nier des assertions avec quantificateurs

- a) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$ c) $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $\forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$
b) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y > 0$ d) $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $\forall y \in \mathbb{R}, y^2 > x$

1. Les assertions précédentes sont-elles vraies ou fausses ?
2. Donner leur négation.

Exercice 7 - Nier des assertions avec quantificateurs (plus difficile)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Nier les assertions suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$
2. $\forall M > 0, \exists A > 0, \forall x \geq A, f(x) > M$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0 \implies x \leq 0$
4. $\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x, y) \in I^2, (|x - y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq \epsilon)$

Exercice 8 - Limites de validité d'une proposition

Déterminer les réels x pour lesquels l'assertion suivante est vraie :

$$\forall y \in \mathbb{R}_+^*, x \geq y \implies x \geq y^2$$

Exercice 9 - Connecteurs logiques

Compléter les pointillés par le connecteur logique \implies , \impliedby ou \iff

1. $x^2 = 4 \dots x = 2$ 3. $e^x = 1 \dots x = 0$
2. \sqrt{x} existe $\dots x \geq 0$ 4. $|x| = 5 \dots -5 \leq x \leq 5$

Exercice 10 - Contraposée - Pair/impair

Soit n un entier. Énoncer et démontrer la contraposée de la proposition suivante :

« Si n^2 est impair, alors n est impair. »

A-t-on démontré la proposition initiale ?

Exercice 11 - Divisibilité par 8

Le but de cet exercice est de démontrer par contraposition la propriété suivante, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

Si l'entier $(n^2 - 1)$ n'est pas divisible par 8, alors l'entier n est pair.

1. Écrire la contraposée de la proposition précédente.
2. Démontrer la contraposée.
3. A-t-on démontré la propriété de l'énoncé ?