Exercice 1 - condition nécessaire, condition suffisante

Compléter les énoncés suivants avec « il faut que », « il suffit que » ou « il faut et il suffit que ».

a) Soit $n \in \mathbb{Z}$. Pour qu'il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $m^2 = n \dots\dots\dots\dots\dots n \geqslant 0$

b) Pour qu'un quadrilatère soit un carré, ... que ses diagonales soient perpendiculaires.

c) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.
Pour que f soit strictement croissante, ... $f'(x) \geqslant 0$ pour tout réel x

Exercice 2 - implications

Démontrer les implications suivantes :

1. Si $x < 1$, alors $|x - 4| > 3$

2. Si $x \geqslant -1$, alors $-2x + 3 \leqslant 6$

3. Si $x \leqslant -3$, alors $x^2 + 2x - 3 \geqslant 0$

4. Si $x > 2$, alors $\dfrac{3}{x^2} < \dfrac{3}{4}$

5. Si $x < -3$, alors $-\dfrac{2}{x^2} > -\dfrac{2}{9}$

Exercice 3 - inégalités

1. Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad x \geqslant 2\sqrt{x} - 1$

2. Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x - 1| \leqslant x^2 - x + 1$

Exercice 4 - pour se mettre en confiance, un raisonnement par ...

On considère la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 3u_n - 1 \end{cases}$$

Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \dfrac{1 - 3^n}{2}$

Exercice 5 - quelle chance ! encore un raisonnement par ...

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $2^{n-1} \leqslant n! \leqslant n^n$

Exercice 6 - une équation, un raisonnement par ...

Résoudre l'équation $\sqrt{x + 1} = x - 5$

Exercice 7 - une équation avec des racines carrées, deux raisonnements possibles

Au brouillon, déterminer les réels x tels que $\sqrt{x+2} = x$
En déduire une rédaction :
- par analyse-synthèse,
- par équivalence.

Exercice 8 - deux raisonnements par ...

Montrer que :

a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, 4 divise n^2 ou 4 divise $n^2 - 1$

b) $\forall x \in \mathbb{R}, x^3 + x^2 - 12x = 0 \Rightarrow |x| < 5$

Exercice 9 - une équation fonctionnelle, un raisonnement par ...

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x) \times f(y) - f(x \times y) = x + y$$

Exercice 10 - quelques raisonnements par ...

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{1 \times 2} + \dfrac{1}{2 \times 3} + \cdots + \dfrac{1}{n \times (n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$

c) Soit x un réel tel que $x > -1$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$

Exercice 11 - un raisonnement par ...

On pose $F_0 = F_1 = 1$ et pour $n \geqslant 0, F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, F_n \geqslant n$

Exercice 12 - équation à paramètre, raisonnement par...

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équation d'inconnue x, en discutant en fonction des valeurs du paramètre réel m :

a) $m^2 x + 3 = m + 9x$

b) $mx^2 - mx + 2 = 0$

Exercice 13 - un raisonnement par ...

Démontrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.