ECG 1 - mathématiques appliquées Pour le 7 octobre 2024

Devoir en temps libre n°2

Corrigé *total sur 33,5 points*

Exercice 1 - Questions diverses et indépendantes *9 points*

1. En français, puis avec des quantificateurs, donner la négation de l'assertion : « f est positive ».

La négation en français est « f n'est pas positive », ce qui s'écrit mathématiquement : $\exists x \in \mathscr{D}_f, f(x) < 0$ *1 point*

2. Avec des quantificateurs, écrire l'assertion « f n'est pas impaire » puis donner sa négation en français (où f est définie sur $\mathbb{R}$). *1 point*

f est impaire s'écrit $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -f(x)$, donc sa négation, i.e. « f n'est pas impaire » s'écrit $\exists x \in \mathbb{R}, f(-x) \neq -f(x)$

3. Pour tout réel x, on définit $f(x) = |2x-1| - 3|1+x| + 2|1+2x|$

a. Suivant les valeurs de x, déterminer l'expression de $f(x)$ sans valeur absolue. *2 points*

On va résumer les différentes situations dans un tableau. Au préalable, on précise que

$|2x-1| = 2x-1 \Leftrightarrow 2x-1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant \dfrac{1}{2}$

et de même $|2x-1| = -(2x-1) = -2x+1$ si $x \leqslant \dfrac{1}{2}$

de même $|1+x| = 1+x \Leftrightarrow x \geqslant -1$ et $|1+x| = -1-x$ si $x \leqslant -1$

et $|1+2x| = 1+2x \Leftrightarrow x \geqslant -\dfrac{1}{2}$ et $|1+2x| = -1-2x$ si $x \leqslant -\dfrac{1}{2}$, d'où le tableau

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$\lvert 2x-1\rvert$		$-2x+1$		$-2x+1$		$-2x+1$	0	$2x-1$	
$\lvert 1+x\rvert$		$-x-1$	0	$x+1$		$x+1$		$x+1$	
$\lvert 1+2x\rvert$		$-2x-1$		$-2x-1$	0	$2x+1$		$2x+1$	
$f(x)$		$-2x+1-3(-x-1)+\dots$		$-2x+1-\dots$		$-2x+1-\dots$	0	$2x-1-\dots$	
$f(x)$		$-3x+2$		$-9x-4$		$-x$		$3x-2$	

b. En déduire les solutions de l'inéquation $\mathscr{I}$ suivante, *2 points*

$$\mathscr{I} : |2x-1| - 3|1+x| \leqslant x - 2|1+2x|$$

$\mathscr{I} \Leftrightarrow |2x-1| - 3|1+x| + 2|1+2x| \leqslant x \Leftrightarrow f(x) \leqslant x$

grâce au travail préparatoire, on va décliner cette inéquation selon les différents domaines trouvés :

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$\mathscr{I} \Leftrightarrow$		$-3x+2 \leqslant x$		$-9x-4 \leqslant x$		$-x \leqslant x$		$3x-2 \leqslant x$	
$\mathscr{I} \Leftrightarrow$		$2 \leqslant 4x$		$-4 \leqslant 10x$		$0 \leqslant 2x$		$2x \leqslant 2$	
$\mathscr{I} \Leftrightarrow$		$\frac{1}{2} \leqslant x$		$-\frac{2}{5} \leqslant x$		$0 \leqslant x$		$x \leqslant 1$	
$\mathscr{S}$		$\emptyset$		$\emptyset$		$\left[0; \frac{1}{2}\right]$		$\left[\frac{1}{2}; 1\right]$	

d'où en regroupant les solutions, $\mathscr{S} = [0; 1]$

4. Résoudre l'équation suivante d'inconnue x et de paramètre $m, m \in \mathbb{R}$: *1,5 points*

$$\frac{3x-m}{x-1} = m$$

On remarque dans un premier temps que l'équation n'est pas définie pour $x = 1$
soit $m \in \mathbb{R}$, alors pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$,
$\dfrac{3x-m}{x-1} = m \Leftrightarrow 3x - m = m(x-1) \Leftrightarrow 3x - mx = m - m \Leftrightarrow (3-m)x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $m = 3$
conclusion, si $m = 3$, l'équation est toujours vérifiée (i.e. pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$) et sinon elle est vérifiée uniquement pour $x = 0$

5. Démontrer que pour tout réel x, $\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \dfrac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor$ *1,5 points*

En tâtonnant, on observe que la situation n'est pas la même pour $x = 1,3$ ou $x = 1,6$: dans un cas $\lfloor 2x \rfloor = 2\lfloor x \rfloor$ et dans l'autre $\lfloor 2x \rfloor = 2\lfloor x \rfloor + 1$, on va donc distinguer deux cas
Soit $x \in \mathbb{R}$, on pose $n = \lfloor x \rfloor$

<u>1er cas</u> : $x < n + \dfrac{1}{2}$, alors $n \leqslant x + \dfrac{1}{2} < n + 1$ et donc $\left\lfloor x + \dfrac{1}{2} \right\rfloor = n$

de plus dans ce cas $2n \leqslant 2x < 2\left(n + \dfrac{1}{2}\right)$ i.e. $2n \leqslant x < 2n + 1$ donc $\lfloor 2x \rfloor = 2n$

finalement $\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \dfrac{1}{2} \right\rfloor = n + n = 2n = \lfloor 2x \rfloor$

<u>2ème cas</u> : $n + \dfrac{1}{2} \leqslant x$ alors d'une part $n + 1 \leqslant x + \dfrac{1}{2} < n + 2$ donc $\left\lfloor x + \dfrac{1}{2} \right\rfloor = n + 1$

et d'autre part $2\left(n + \dfrac{1}{2}\right) \leqslant 2x < 2n + 2$ i.e. $2n + 1 \leqslant 2x < 2n + 2$ et donc $\lfloor 2x \rfloor = 2n + 1$

donc là encore $\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \dfrac{1}{2} \right\rfloor = n + n + 1 = 2n + 1 = \lfloor 2x \rfloor$

Exercice 2 *7,5 points*

Pour chacune des fonctions suivantes, dire sur quel ensemble elle est dérivable, puis déterminer l'expression de sa fonction dérivée.

Parmi les fonctions de référence, à part la fonction racine carrée (et la fonction valeur absolue mais qui ne fait pas partie de la liste ci-dessous), toutes les fonctions sont dérivables là où elles sont définies, donc l'ensemble de dérivabilité est le même que l'ensemble de définition.

a) $f : x \longmapsto -4$ *0,5 point*

f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, de plus $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 0$

b) $g : x \longmapsto 4x^5$ *0,5 point*

g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, de plus $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = 4 \times 5x^4 = 20x^4$

c) $h : x \longmapsto \dfrac{1}{2}x^4 + \dfrac{1}{4x^8}$ *1 point*

h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ (x ne peut être égal à 0 du fait du $\dfrac{1}{x^8}$, de plus pour tout x non nul, on peut écrire $h(x) = \dfrac{1}{2}x^4 + \dfrac{1}{4}x^{-8}$

donc $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = \dfrac{1}{2} \times 4x^3 + \dfrac{1}{4} \times (-8) \times x^{-9}$

donc $h'(x) = 2x^3 - 2 \times x^{-9} = 2x^3 - \dfrac{2}{x^9}$

d) $i : x \longmapsto \sqrt{2x - 10}$ *1 point*

i est définie dès que $2x - 10 \geqslant 0$ soit $2x \geqslant 10$ i.e. $x \geqslant 5$

donc i est définie sur $[5, +\infty[$

mais la fonction racine carrée n'étant pas dérivable en 0, la fonction i n'est pas dérivable quand $2x - 10 = 0$ i.e. pour $x = 5$

donc i est dérivable sur $]5, +\infty[$

alors comme $i(x) = \sqrt{u(x)}$ avec $u(x) = 2x - 10$ et donc $u'(x) = 2$, on en déduit que pour $x \in]5, +\infty[, i'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \dfrac{2}{2\sqrt{2x - 10}} = \dfrac{1}{\sqrt{2x - 10}}$

e) $j : x \longmapsto e^{x^2}$ *0,75 point*

j est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ de plus j est de la forme e^u avec $u(x) = x^2$ et donc $u'(x) = 2x$, on en déduit que $\forall x \in \mathbb{R}, j'(x) = u'(x)e^{u(x)} = 2xe^{x^2}$

f) $k : x \longmapsto \ln\left(\sqrt{3x + 6}\right)$ *1,5 points*

k ne sera définie que quand $\sqrt{3x + 6} > 0$ i.e. pour $3x > -6$ et donc $x > -2$

donc k est définie sur $] - 2, +\infty[$

comme le contenu de la racine ne s'annule jamais sur cet intervalle, on évite le problème de dérivabilité de la fonction racine carrée en 0 et donc k est dérivable sur $] - 2, +\infty[$

on peut remarquer que $\forall x \in]-2, +\infty[, \sqrt{3x + 6} = (3x+6)^{\frac{1}{2}}$ (attention cette écriture n'est valable que si le contenu de la parenthèse est strictement positif)

donc $\forall x \in] - 2, +\infty[, \ln\left(\sqrt{3x + 6}\right) = \ln\left((3x + 6)^{\frac{1}{2}}\right) = \dfrac{1}{2}\ln(3x + 6) = \dfrac{1}{2}\ln(u(x))$

avec $u(x) = 3x + 6$ et donc $u'(x) = 3$

on aurait pu d'ailleurs déterminer le domaine de dérivabilité avec cette forme

donc $\forall x \in] - 2, +\infty[, k'(x) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{u'(x)}{u(x)} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{3}{3x + 6} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{x + 2} = \dfrac{1}{2x + 4}$

g) $l : x \longmapsto (-13x + 4)^7$ *0,75 point*

l est de la forme $(u(x))^n$ avec $n > 0$ et $u(x) = -13x + 4$ (donc $u'(x) = -13$)

donc l est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$
de plus $\forall x \in \mathbb{R}, l'(x) = 7u'(x)(u(x))^6 = 7 \times (-13) \times (-13x+4)^6 = -91(-13x+4)^6$

h) $m : x \longmapsto x^{x^2}$ *1,5 points*

Pour une puissance quelconque, on est généralement obligé de se ramener à la définition :
$x^{x^2} = \exp(x^2 \ln(x))$ qui est valable pour $x > 0$
donc l est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$, de plus l est de la forme e^u avec $u(x) = x^2 \ln(x)$
il faut utiliser la formule du produit pour dériver u, on peut poser $v(x) = x^2$ et $w(x) = \ln(x)$ donc
$v'(x) = 2x$ et $w'(x) = \dfrac{1}{x}$
de fait pour $\forall x \in]0, +\infty[, u'(x) = 2x\ln(x) + x^2 \times \dfrac{1}{x} = 2x\ln(x) + x$
et donc $\forall x \in]0, +\infty[, l'(x) = u'(x)e^{u(x)} = (2x\ln(x)+x)e^{x^2\ln(x)} = (2x\ln(x)+x)x^{x^2}$

Exercice 3 - récurrence *2,5 points*

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et par la relation : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{n^2 + u_n}$
Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant n$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la proposition $P(n)$: $u_n \leqslant n$
Initialisation : $P(0)$ est vraie $\Leftrightarrow u_0 \leqslant 0$ ce qui est vrai car $u_0 = 0$ donc $P(0)$ est vraie
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie,
par définition, $u_{n+1} = \sqrt{n^2 + u_n}$
or, par hypothèse de récurrence, $u_n \leqslant n$, donc $n^2 + u_n \leqslant n^2 + n$
donc $\sqrt{n^2 + u_n} \leqslant \sqrt{n^2 + n}$ car la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}_+$
soit $u_{n+1} \leqslant \sqrt{n^2 + n}$
or $n \geqslant 0$ donc $n^2 + n \leqslant n^2 + 2n + 1$ et donc (croissance de $\sqrt{.}$ encore) $\sqrt{n^2+n} \leqslant \sqrt{n^2+2n+1}$
et donc $u_{n+1} \leqslant \sqrt{n^2+2n+1}$ c'est-à-dire $u_{n+1} \leqslant \sqrt{(n+1)^2} = n+1$ (car $n \geqslant 0$)
donc $P(n+1)$ est vraie, d'où l'hérédité
donc par théorème de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ i.e. $u_n \leqslant n$

Exercice 4 - logique britannique *0,5 point par question - total : 2,5 points*

On s'intéresse à la proposition P « tous les anglais sont des artistes et des physiciens ».

1. On considère que P est vraie. En déduire, si possible, si les propositions suivantes sont vraies ou fausses.

a) Isaac est anglais donc il est artiste.

Vraie (Isaac est anglais et donc artiste). Cela ne contredit pas « artiste et physicien ». On peut voir Isaac artiste comme $x \in A$ (Isaac appartient au groupe des artistes, ce qui est vrai).

b) Juan est un physicien donc il est anglais.

Faux (rien ne nous dit que tous les physiciens sont anglais).

c) Paul n'est pas un physicien donc il n'est pas anglais.

Vraie (s'il était anglais, il serait physicien).

d) Il existe des physiciens qui ne sont pas anglais.

Vraie (par exemple « il existe un physicien italien » ne contredit pas P). Mais encore faudrait-il savoir qu'il en existe, donc la réponse « on ne sait » était aussi appropriée.

2. Donner la négation de la proposition P

La négation de P est « il existe un anglais (au moins) qui n'est pas artiste ou pas physicien ».

Exercice 5 - étude de fonction *12 points*

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{(x+1)\ln x}{x-1}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f que l'on notera $\mathscr{D}_f$ et l'ensemble de dérivabilité de f

f est définie dès lors que $\ln(x)$ est définie, i.e. pour $x > 0$ et que le dénominateur est non nul, soit $x-1 \neq 0$, i.e. $x \neq 1$, donc $\mathscr{D}_f =]0,1[\cup]1,+\infty[$ et c'est également l'ensemble de dérivabilité puisqu'il n'y a pas de contrainte supplémentaire pour la dérivation. *0,5 point*

2. Déterminer le signe de f *1 point*

On effectue directement un tableau de signe sachant que $x+1$ est toujours positif ici, par ailleurs $\ln(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 1$ et $x-1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 1$, donc :

x	0		1		$+\infty$
$\ln(x)$		-	0	$+$	
$x-1$		-	0	$+$	
$f(x)$		$+$	‖	$+$	

finalement f est toujours positive

3. Déterminer f' la dérivée de f sur $\mathscr{D}_f$ *1,5 points*

f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = (x+1)\ln x$ et $v(x) = x-1$

On trouve facilement $v'(x) = 1$, et pour dériver u on peut cette fois utiliser la formule du produit avec $s(x) = x+1$ et $t(x) = \ln(x)$

donc $s'(x) = 1$ et $t'(x) = \dfrac{1}{x}$, ce qui entraine $u'(x) = \ln(x) + \dfrac{x+1}{x}$

Finalement en appliquant $f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, on obtient :

$$f'(x) = \frac{\left(\ln(x) + \frac{x+1}{x}\right)(x-1) - (x+1)\ln(x)}{(x-1)^2}$$

donc $f'(x) = \dfrac{x\ln(x) - \ln(x) + \frac{(x+1)(x-1)}{x} - x\ln(x) - \ln(x)}{(x-1)^2}$

donc $f'(x) = \dfrac{\frac{x^2-1}{x} - 2\ln(x)}{(x-1)^2} = \dfrac{x - \frac{1}{x} - 2\ln(x)}{(x-1)^2}$

4. Etudier la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = x - \dfrac{1}{x} - 2\ln(x)$, en déduire son signe.

g est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $g'(x) = 1 + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x} = \dfrac{x^2-2x+1}{x^2} = \dfrac{(x-1)^2}{x^2} = \left(\dfrac{x-1}{x}\right)^2$

de fait $\forall x \in]0;+\infty[, g'(x) \geqslant 0$ on en déduit que g est croissante sur $]0;+\infty[$

or $g(1) = 0$, donc $\forall x \in]0;1], g(x) \leqslant 0$ et $\forall x \in [1;+\infty[, g(x) \geqslant 0$ *1,5 points*

5. En déduire les variations de f sur $\mathscr{D}_f$ *1 point*

En exploitant g, on écrit que $\forall x \in \mathscr{D}_f, f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x-1)^2}$

et on en déduit le signe de f' qui est le même que celui de g

x	0		0		$+\infty$
$g(x)$	‖	-	0	$+$	
$f'(x)$	‖	-	‖	$+$	
f	‖	$\searrow$?	‖	? $\nearrow$	

6. Expliquer pourquoi $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (on ne cherchera pas à faire une démonstration rigoureuse). *1 point*

Nous n'avons pas encore les outils pour le démontrer, mais on peut pressentir que le coefficient $\dfrac{x+1}{x-1}$ tendra vers 1 quand x tend vers $+\infty$ (le numérateur et le dénominateur devenant de plus en plus proche de manière relative)
de fait la limite sera $1\times$ celle du logarithme,
or le logarithme tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$
d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

7. Représenter graphiquement f *2,5 points*

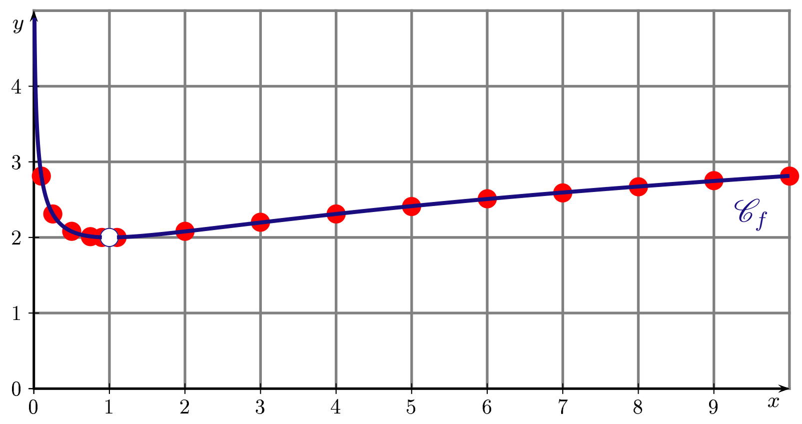
On pourra utiliser la calculatrice pour calculer des valeurs approchées.

On peut calculer quelques images :

$f(0.1) \approx 2,81$
$f(0.25) \approx 2,31$
$f(0.5) \approx 2,08$
$f(0.75) \approx 2,01$
$f(0.9) \approx 2,00$

$f(1.1) \approx 2,00$
$f(2) \approx 2.08$
$f(3) \approx 2,20$
$f(4) \approx 2,31$
$f(5) \approx 2.41$

$f(6) \approx 2,51$
$f(7) \approx 2,59$
$f(8) \approx 2.67$
$f(9) \approx 2,75$
$f(10) \approx 2,81$



8. Avec Python :

a. écrire un programme qui définit la fonction f *1 point*

En ayant préalablement importé **numpy** pour le logarithme, on utilise la syntaxe propre à la définition de fonction :

```
import numpy as np
def f(x):
  return (x+1)*np.log(x)/(x-1)
```

b. écrire un programme qui calcule 100 images distinctes de la fonction f (abscisses au choix), puis qui représente f *1,5 points*

Avec `np.linspace` on fait le choix de prendre 100 abscisses linéairement réparties entre $0,1$ et 10 (ce choix évite la valeur 1), puis on calcule les images et on représente avec les commandes classiques (avec la fonction f définie précédemment).

```python
import matplotlib.pyplot as plt
x=np.linspace(0.1, 10, 100)
y=f(x)
plt.plot(x,y)
plt.show()
```

9. A l'aide du graphique obtenu à la question **8.b.**, proposer une valeur pour $f(1)$ qui rendrait la fonction continue (au moins en apparence). *0,5 point*

Graphiquement on voit que $f(x)$ se rapproche indéfiniment de 2 quand x tend vers 1^- (i.e. quand x se rapproche de 1 en restant inférieur à 1).
De même, on voit que $f(x)$ se rapproche indéfiniment de 2 quand x tend vers 1^+
Cela provient du fait que $\dfrac{\ln x}{x-1}$ est une forme indéterminée quand x tend vers 1 (« $\dfrac{0}{0}$ »), mais ici numérateur et dénominateur se compensent et le quotient tend vers 1 (et $x+1$ vaut 2 en 1).
On pourrait donc proposer $f(1) = 2$ ce qu'on appelle un prolongement par continuité.