Quelques corrigés

Sommes

Exercice 2

Calculer, ou simplifier en fonction de n, les sommes suivantes.

i) $\displaystyle\sum_{k=4}^{n+1}\frac{2^k}{3^{k-2}}=\sum_{k=4}^{n+1}\frac{1}{3^{-2}}\times\frac{2^k}{3^k}=\frac{1}{3^{-2}}\sum_{k=4}^{n+1}\frac{2^k}{3^k}=3^2\times\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^4-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+2}}{1-\frac{2}{3}}=3^2\times\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^4-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+2}}{\frac{1}{3}}$

donc $\displaystyle\sum_{k=4}^{n+1}\frac{2^k}{3^{k-2}}=3^3\times\left(\frac{2}{3}\right)^4\times\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\right)=\frac{16}{3}\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\right)$

Exercice 6

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Démontrer l'égalité suivante (en faisant d'abord un changement d'indice) :

$$\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{1+\dfrac{j}{n}}$$

Souvent dans ce genre de situation, il vaut mieux partir de l'expression la plus compliquée :

$\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{j}{n}}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\frac{n+j}{n}}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{n+j}=\frac{1}{n}\times n\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n+j}=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n+j}$

A ce stade, le changement d'indice est naturel, on pose $k=n+j$, donc $j=1\Rightarrow k=n+1$ et $j=n\Rightarrow k=n+n=2n$ donc $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n+j}=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}$

Exercice 7

Calculer

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{9}k^2=\frac{9\times10\times(2\times9+1)}{6}$ d'après le cours, donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{9}k^2=\frac{3\times3\times2\times5\times19}{6}=15\times19=285$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{200}(-1)^k k$

On ne peut évidemment pas utiliser d'emblée la somme des entiers, mais on va s'y ramener en introduisant $\displaystyle\sum_{k=1}^{200}k$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{200}(-1)^k k+\sum_{k=1}^{200}k=\sum_{k=1}^{200}((-1)^k+1)k$

or si k est pair $(-1)^k=1$ alors $((-1)^k+1)=2$

et si n est impair $(-1)^k=-1$ alors $((-1)^k+1)=0$

donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{200}(-1)^k k+\sum_{k=1}^{200}k=\sum_{\substack{k=1\\k\text{ pair}}}^{200}2k=2\sum_{p=1}^{100}2p=4\sum_{p=1}^{100}p=4\times\frac{100\times101}{2}=2\times100\times101=20\,200$

or $\displaystyle\sum_{k=1}^{200}k=\frac{200\times201}{2}=100\times201=20\,100$ donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{200}(-1)^k k=20\,200-20\,100=100$

On peut aussi remarquer (en écrivant la somme avec des ...), que :

$\displaystyle\sum_{k=1}^{200}(-1)^k k=\sum_{k=1}^{100}[2k-(2k-1)]=\sum_{k=1}^{100}1=100$

Exercice 9 - sommes géométrique et télescopique, et changement de variable

Soit q un nombre réel (ou complexe) différent de 1 et n un entier positif ou nul.

a) Calculer $(1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k$ et en déduire la formule de la somme géométrique.

On commence par distribuer $(1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k - q\sum_{k=0}^{n} q^k$

or par linéarité $q\sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n} qq^k = \sum_{k=0}^{n} q^{k+1}$

donc $(1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k - \sum_{k=0}^{n} q^{k+1} = \sum_{k=0}^{n}(q^k - q^{k+1})$ par linéarité à nouveau

on se retrouve alors avec une somme télescopique, en posant $a_k = q^k$, on a alors $a_{k+1} = q^{k+1}$

et donc $\sum_{k=0}^{n}(q^k - q^{k+1}) = \sum_{k=0}^{n}(a_k - a_{k+1}) = a_0 - a_{n+1} = q^0 - q^{n+1} = 1 - q^{n+1}$

Finalement $(1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 - q^{n+1}$ et donc si $q \neq 1$, $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

b) A l'aide d'un changement de variable approprié, en déduire la formule généralisée.

On cherche à se ramener à une somme qui commence à 0. Pour cela, on pose $j = k - p$, alors $k = p \Rightarrow j = 0$ et $k = n \Rightarrow j = n - p$:

donc $\sum_{k=p}^{n} q^k = \sum_{j=0}^{n-p} q^{p+j} = \sum_{j=0}^{n-p} q^p q^j = q^p \sum_{j=0}^{n-p} q^j$

on se retrouve alors dans la situation de la formule démontrée au a),

$\sum_{j=0}^{n-p} q^j = \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$ et donc $q^p\sum_{j=0}^{n-p} q^j = q^p\frac{1-q^{n-p+1}}{1-q} = \frac{q^p(1-q^{n-p+1})}{1-q} = \frac{q^p - q^{n-p+1+p}}{1-q} = \frac{q^p - q^{n+1}}{1-q}$

or $\sum_{k=p}^{n} q^k = q^p\sum_{j=0}^{n-p} q^j$ et donc $\sum_{k=p}^{n} q^k = \frac{q^p - q^{n+1}}{1-q}$

Produits

Exercice 12

Simplifier en fonction de n les produits suivants. ($n \in \mathbb{N}^*$, et $x \in \mathbb{R}^*$).

a) $\prod_{k=0}^{n} 5 = 5^{n+1}$ d'après le cours

b) $\prod_{k=1}^{n}(2k) = 2^n \prod_{k=1}^{n} k = 2^n n!$ d'après le cours

On peut le redémontrer en écrivant (autre propriété du cours) $\prod_{k=1}^{n}(2k) = \left(\prod_{k=1}^{n} 2\right)\left(\prod_{k=1}^{n} k\right) = 2^n n!$

c) $\prod_{k=0}^{n+1} x^k$

Les propriétés sur les puissances ($x^a x^b = x^{a+b}$) entraine $\prod_{k=0}^{n+1} x^k = x^{0+1+2+\dots+n+1} = x^{\sum_{k=0}^{n+1} k}$, ce que l'on va démontrer par récurrence : pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la propriété $P(n)$: $\prod_{k=0}^{n+1} x^k = x^{\sum_{k=0}^{n+1} k}$

Initialisation : pour $n = 0$, d'une part $\prod_{k=0}^{n+1} x^k = \prod_{k=0}^{0+1} x^k = x^0 \times x = x$

d'autre part, $x^{\sum_{k=0}^{n+1} k} = x^{\sum_{k=0}^{0+1} k} = x^{0+1} = x$

donc $P(0)$ est vérifiée

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $P(n)$ est vraie

$\prod_{k=0}^{n+2} x^k = \left(\prod_{k=0}^{n+1} x^k\right) x^{n+2}$

or par hypothèse de récurrence : $\prod_{k=0}^{n+1} x^k = x^{\sum_{k=0}^{n+1} k}$

donc $\prod_{k=0}^{n+2} x^k = x^{\sum_{k=0}^{n+1} k} x^{n+2} = x^{(\sum_{k=0}^{n+1} k)+n+2} = x^{\sum_{k=0}^{n+2}}$ car $\left(\sum_{k=0}^{n+1} k\right) + n + 2 = \sum_{k=0}^{n+2} k$

donc $P(n+1)$ est vérifiée, d'où l'hérédité

donc par théorème de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ est vraie.

Puis on conclut en utilisant la somme des entiers :

$\sum_{k=0}^{n+1} k = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$ donc $x^{\sum_{k=0}^{n+1} k} = x^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}$ et donc $\prod_{k=0}^{n+1} x^k = x^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}$

Exercice 13

1. Pour k un entier supérieur ou égal à 2, mettre $1 - \dfrac{1}{k^2}$ au même dénominateur puis factoriser le numérateur de la fraction obtenue.

Soit $k \in \mathbb{N}, k \geqslant 2, 1 - \dfrac{1}{k^2} = \dfrac{k^2-1}{k^2} = \dfrac{(k-1)(k+1)}{k^2}$

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, en déduire l'expression du produit P_n en fonction de n :

$$P_n = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$$

D'après **1.** $P_n = \prod_{k=2}^{n} \dfrac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \dfrac{\prod_{k=2}^{n}(k-1)(k+1)}{\prod_{k=2}^{n} k^2} = \dfrac{\left(\prod_{k=2}^{n}(k-1)\right)\left(\prod_{k=2}^{n}(k+1)\right)}{\left(\prod_{k=2}^{n} k\right)\left(\prod_{k=2}^{n} k\right)}$

donc $P_n = \dfrac{\prod_{k=2}^{n}(k-1)}{\prod_{k=2}^{n} k} \dfrac{\prod_{k=2}^{n}(k+1)}{\prod_{k=2}^{n} k} = \prod_{k=2}^{n} \dfrac{k-1}{k} \prod_{k=2}^{n} \dfrac{k+1}{k}$

il s'agit de deux produits télescopiques $\prod_{k=2}^{n} \dfrac{k-1}{k} = \dfrac{1}{n}$ et $\prod_{k=2}^{n} \dfrac{k+1}{k} = \dfrac{n+1}{2}$

donc finalement $P_n = \dfrac{n+1}{2n}$

Exercice 14 - factorielle - 1

Simplifier les expressions suivantes : d)$(2n+1)! - (2n)!$

Comme au a), $(2n+1)! - (2n)! = (2n+1)(2n)! - (2n)! = (2n+1-1)(2n)! = 2n(2n)!$

Exercice 15 - factorielle - 2

Montrer que $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2$ avec $p \leqslant n$, $\prod_{k=p}^{n} k = \dfrac{a!}{b!}$ où a et b sont deux entier à préciser.

Soit $(n,p)\in\mathbb{N}^2$ avec $p\leqslant n$, alors l'objectif étant de se ramener à des factorielles, on va compléter le produit par les termes manquants :
$\displaystyle\prod_{k=p}^{n} k=\frac{\prod_{k=1}^{p-1}k}{\prod_{k=1}^{p-1}k}\prod_{k=p}^{n} k=\frac{\prod_{k=1}^{p-1}k\prod_{k=p}^{n}k}{\prod_{k=1}^{p-1}k}=\frac{\prod_{k=1}^{n}k}{\prod_{k=1}^{p-1}k}$ d'après la relation de Chasles

or $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} k=n!$ et $\displaystyle\prod_{k=1}^{p-1} k=(p-1)!$ donc $\displaystyle\prod_{k=p}^{n} k=\frac{n!}{(p-1)!}$

Exercice 16 - factorielle - 3

Ecrire les nombres suivants à l'aide de factorielle :

a) $\displaystyle\prod_{j=3}^{n}(2j)$

D'après la propriété du cours $\displaystyle\prod_{j=3}^{n}(2j)=2^{n-2}\prod_{j=3}^{n}j$

or $\displaystyle\prod_{j=3}^{n}j=\frac{\prod_{j=1}^{2}j\prod_{j=3}^{n}j}{\prod_{j=1}^{2}j}=\frac{\prod_{j=1}^{n}j}{1\times 2}=\frac{n!}{2}$

finalement $\displaystyle\prod_{j=3}^{n}(2j)=2^{n-2}\times\frac{n!}{2}=2^{n-3}n!$

b) $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}\left(\frac{2}{n+k}\right)$

Par propriété $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}\left(\frac{2}{n+k}\right)=\frac{\prod_{k=0}^{n}2}{\prod_{k=0}^{n}(n+k)}=\frac{2^{n+1}}{\prod_{k=0}^{n}(n+k)}$

or $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(n+k)=\prod_{j=n}^{2n}j$ avec le changement d'indice $j=n+k$ ($k=0\Rightarrow j=n$ et $k=n\Rightarrow j=2n$)

donc $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(n+k)=\frac{\prod_{j=1}^{n-1}j\prod_{j=n}^{2n}j}{\prod_{j=1}^{n-1}j}=\frac{\prod_{j=1}^{2n}j}{\prod_{j=1}^{n-1}j}=\frac{(2n)!}{(n-1)!}$

finalement $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}\left(\frac{2}{n+k}\right)=\frac{2^{n+1}}{\frac{(2n)!}{(n-1)!}}=\frac{2^{n+1}(n-1)!}{(2n)!}$

Exercice 17 - factorielle - 4

On pose $C=1\times 3\times 5\times\ldots\times(2n-1)\times(2n+1)$ et $D=2\times 4\times 6\times\cdots\times(2n-2)\times 2n$ (cf. exercice 1).

a) Ecrire D sous la forme d'une factorielle et d'une puissance.

D est le produit des entiers de 2 à $2n$, $D=\displaystyle\prod_{k=1}^{n}2k$

or $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}2k=2^n\prod_{k=1}^{n}k=2^n n!$ de manière analogue à l'exercice **12**.a)

b) En déduire que $C=\dfrac{a!}{2^n b!}$ où a et b sont deux entier à préciser.

On remarque $CD=\displaystyle\prod_{k=1}^{2n+1}k=(2n+1)!$

or $D=2^n n!$ donc $C2^n n!=(2n+1)!$ et donc $C=\dfrac{(2n+1)!}{2^n n!}$

Exercice 18 - produit télescopique

Calculer $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k}$

Il s'agit d'un produit télescopique, on peut donc utiliser la propriété du cours.

En posant $a_k = k$, on a alors $a_{k+1} = k+1$ et donc $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k} = \prod_{k=1}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{n+1}}{a_1} = \frac{n+1}{1} = n+1$

On peut aussi le démontrer sans la propriété : $\displaystyle\frac{\prod_{k=1}^{n}(k+1)}{\prod_{k=1}^{n} k} = \frac{\left(\prod_{k=1}^{n-1}(k+1)\right) \times (n+1)}{n!}$

or par changement d'indice $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} k+1 = \prod_{i=2}^{n} i = \prod_{i=1}^{n} i = n!$

donc $\displaystyle\frac{\prod_{k=1}^{n} k+1}{\prod_{k=1}^{n} k} = \frac{n! \times (n+1)}{n!} = n+1$

Sommes doubles

Exercice 19

Calculer les sommes suivantes :

b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}(i+j) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} i + \sum_{j=1}^{p} j\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(p \times i + \frac{p(p+1)}{2}\right) = \sum_{i=1}^{n} p \times i + \sum_{i=1}^{n} \frac{p(p+1)}{2}$

donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}(i+j) = p\frac{n(n+1)}{2} + n\frac{p(p+1)}{2} = \frac{np(n+p+2)}{2}$