

## Fractions

### Prérequis

Règles de calcul sur les fractions.

## Calculs dans l'ensemble des rationnels

### Calcul 1.1 — Simplification de fractions.



Simplifier les fractions suivantes (la lettre  $k$  désigne un entier naturel non nul).

a) $\frac{32}{40}$ .....	<input type="text"/>	c) $\frac{27^{-1} \times 4^2}{3^{-4} \times 2^4}$ .....	<input type="text"/>
b) $8^3 \times \frac{1}{4^2}$ .....	<input type="text"/>	d) $\frac{(-2)^{2k+1} \times 3^{2k-1}}{4^k \times 3^{-k+1}}$ .....	<input type="text"/>

### Calcul 1.2 — Sommes, produits, quotients, puissances.



Écrire les nombres suivants sous forme d'une fraction irréductible.

a) $\frac{2}{4} - \frac{1}{3}$ .....	<input type="text"/>	c) $\frac{36}{25} \times \frac{15}{12} \times 5$ .....	<input type="text"/>
b) $\frac{2}{3} - 0,2$ .....	<input type="text"/>	d) $-\frac{2}{15} \div (-\frac{6}{5})$ .....	<input type="text"/>

### Calcul 1.3



Écrire les nombres suivants sous forme d'une fraction irréductible.

a) $(2 \times 3 \times 5 \times 7)(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7})$ .....	<input type="text"/>
b) $(\frac{136}{15} - \frac{28}{5} + \frac{62}{10}) \times \frac{21}{24}$ .....	<input type="text"/>
c) $\frac{5^{10} \times 7^3 - 25^5 \times 49^2}{(125 \times 7)^3 + 5^9 \times 14^3}$ .....	<input type="text"/>
d) $\frac{1\ 978 \times 1\ 979 + 1\ 980 \times 21 + 1958}{1\ 980 \times 1\ 979 - 1\ 978 \times 1\ 979}$ .....	<input type="text"/>

### Calcul 1.4 — Un petit calcul.



Écrire  $\frac{0,5 - \frac{3}{17} + \frac{3}{37}}{\frac{5}{6} - \frac{5}{17} + \frac{5}{37}} + \frac{0,5 - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - 0,2}{\frac{7}{5} - \frac{7}{4} + \frac{7}{3} - 3,5}$  sous forme d'une fraction irréductible. ....

### Calcul 1.5 — Le calcul littéral à la rescousse.



En utilisant les identités remarquables et le calcul littéral, calculer les nombres suivants.

a) $\frac{2\ 022}{(-2\ 022)^2 + (-2\ 021)(2\ 023)}$ ..	<input type="text"/>	c) $\frac{1\ 235 \times 2\ 469 - 1\ 234}{1\ 234 \times 2\ 469 + 1\ 235}$ .....	<input type="text"/>
b) $\frac{2\ 021^2}{2\ 020^2 + 2\ 022^2 - 2}$ .....	<input type="text"/>	d) $\frac{4\ 002}{1\ 000 \times 1\ 002 - 999 \times 1\ 001}$ ..	<input type="text"/>

**Calcul 1.6 — Les fractions et le calcul littéral.**



Mettre sous la forme d'une seule fraction, qu'on écrira sous la forme la plus simple possible.

- a)  $\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$  .....
- b)  $\frac{a^3 - b^3}{(a-b)^2} - \frac{(a+b)^2}{a-b}$  pour  $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ , distincts deux à deux. ....
- c)  $\frac{\frac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)}}{\frac{2n+2}{n^2(n-1)^2}}$  pour  $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1, 2\}$ . ....

**Calcul 1.7 — Le quotient de deux sommes de Gauss.**



Simplifier  $\frac{\sum_{k=0}^{n^2} k}{\sum_{k=0}^n k}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , en utilisant la formule  $1 + 2 + \dots + p = \frac{p(p+1)}{2}$ . ....

**Calcul 1.8 — Décomposition en somme d'une partie entière et d'une partie décimale.**



Soit  $k \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$  et  $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ . Écrire les fractions suivantes sous la forme  $a + \frac{b}{c}$  avec  $b < c$ .

- a)  $\frac{29}{6}$  .....       b)  $\frac{k}{k-1}$  ...       c)  $\frac{3x-1}{x-2}$  ..

**Calcul 1.9 — Un produit de fractions.**



Soit  $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ . On donne  $A = \frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{(1+t)^2}$  et  $B = (1+t^2)(1+t)^2$ .

Simplifier  $AB$  autant que possible. ....

## Comparaison

**Calcul 1.10 — Règles de comparaison.**



Comparer les fractions suivantes avec le signe « > », « < » ou « = ».

- a)  $\frac{3}{5} \dots \frac{5}{9}$  .....       b)  $\frac{12}{11} \dots \frac{10}{12}$  .....       c)  $\frac{125}{25} \dots \frac{105}{21}$  .....

**Calcul 1.11 — Produit en croix.**



Les nombres  $A = \frac{33\ 215}{66\ 317}$  et  $B = \frac{104\ 348}{208\ 341}$  sont-ils égaux? Oui ou non? ....

**Calcul 1.12 — Produit en croix.**



On pose  $A = \frac{100\ 001}{1\ 000\ 001}$  et  $B = \frac{1\ 000\ 001}{10\ 000\ 001}$  : a-t-on  $A > B$ ,  $A = B$  ou  $A < B$ ? .....

## Puissances

### Prérequis

Opérations sur les puissances (produits, quotients), décomposition en facteurs premiers, sommes d'expressions fractionnaires (même dénominateur), identités remarquables, factorisations et développements simples.

### Calcul 2.1



Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme d'une puissance de 10.

a)  $10^5 \cdot 10^3$  .....       c)  $\frac{10^5}{10^3}$  .....       e)  $\frac{(10^5 \cdot 10^{-3})^5}{(10^{-5} \cdot 10^3)^{-3}}$  .....

b)  $(10^5)^3$  .....       d)  $\frac{10^{-5}}{10^{-3}}$  .....       f)  $\frac{(10^3)^{-5} \cdot 10^5}{10^3 \cdot 10^{-5}}$  .....

### Calcul 2.2



Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme  $a^n$  avec  $a$  et  $n$  deux entiers relatifs.

a)  $3^4 \cdot 5^4$  .....       c)  $\frac{2^5}{2^{-2}}$  .....       e)  $\frac{6^5}{2^5}$  .....

b)  $(5^3)^{-2}$  .....       d)  $(-7)^3 \cdot (-7)^{-5}$  .....       f)  $\frac{(30^4)^7}{2^{28} \cdot 5^{28}}$  .....

### Calcul 2.3



Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme  $2^n \cdot 3^p$ , où  $n$  et  $p$  sont deux entiers relatifs.

a)  $\frac{2^3 \cdot 3^2}{3^4 \cdot 2^8 \cdot 6^{-1}}$  .....       c)  $\frac{3^{22} + 3^{21}}{3^{22} - 3^{21}}$  .....

b)  $2^{21} + 2^{22}$  .....       d)  $\frac{(3^2 \cdot (-2)^4)^8}{((-3)^5 \cdot 2^3)^{-2}}$  .....

### Calcul 2.4



Dans chaque cas, simplifier au maximum.

a)  $\frac{8^{17} \cdot 6^{-6}}{9^{-3} \cdot 2^{42}}$  .....       c)  $\frac{12^{-2} \cdot 15^4}{25^2 \cdot 18^{-4}}$  .....

b)  $\frac{55^2 \cdot 121^{-2} \cdot 125^2}{275 \cdot 605^{-2} \cdot 25^4}$  .....       d)  $\frac{36^3 \cdot 70^5 \cdot 10^2}{14^3 \cdot 28^2 \cdot 15^6}$  .....

### Calcul 2.5



Dans chaque cas, simplifier au maximum l'expression en fonction du réel  $x$ .

a)  $\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+1} - \frac{2}{x^2-1}$  .....       c)  $\frac{x^2}{x^2-x} + \frac{x^3}{x^3+x^2} - \frac{2x^2}{x^3-x}$  .....

b)  $\frac{2}{x+2} - \frac{1}{x-2} + \frac{8}{x^2-4}$  .....       d)  $\frac{1}{x} + \frac{x+2}{x^2-4} + \frac{2}{x^2-2x}$  .....

## Calcul littéral

### Prérequis

Les identités remarquables !

## Développer, réduire et ordonner

Dans cette section, on tâchera de mener les calculs avec le minimum d'étapes. Idéalement, on écrira directement le résultat. La variable  $x$  représente un nombre réel (ou complexe).

### Calcul 3.1



Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes selon les puissances décroissantes de  $x$ .

- |  |                      |                                 |                      |
|--|----------------------|---------------------------------|----------------------|
| a) $\left(2x - \frac{1}{2}\right)^3$ ..... | <input type="text"/> | d) $(x+1)^2(x-1)(x^2+x+1)$ .... | <input type="text"/> |
| b) $(x-1)^3(x^2+x+1)$ .....                | <input type="text"/> | e) $(x-1)^2(x+1)(x^2+x+1)$ .... | <input type="text"/> |
| c) $(x+1)^2(x-1)(x^2-x+1)$ ....            | <input type="text"/> | f) $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$ .....   | <input type="text"/> |

### Calcul 3.2



Développer, réduire et ordonner les expressions polynomiales suivantes selon les puissances croissantes de  $x$ .

- |  |                      |
|--|----------------------|
| a) $(x-2)^2(-x^2+3x-1) - (2x-1)(x^3+2)$ .....                      | <input type="text"/> |
| b) $(2x+3)(5x-8) - (2x-4)(5x-1)$ .....                             | <input type="text"/> |
| c) $\left((x+1)^2(x-1)(x^2-x+1) + 1\right)x - x^6 - x^5 + 2$ ..... | <input type="text"/> |
| d) $(x+1)(x-1)^2 - 2(x^2+x+1)$ .....                               | <input type="text"/> |
| e) $(x^2 + \sqrt{2}x + 1)(1 - \sqrt{2}x + x^2)$ .....              | <input type="text"/> |
| f) $(x^2 + x + 1)^2$ .....   | <input type="text"/> |

## Factoriser

### Calcul 3.3 — Petite mise en jambe.



Factoriser les expressions polynomiales de la variable réelle  $x$  suivantes.

- |                                       |                      |
|---------------------------------------|----------------------|
| a) $-(6x+7)(6x-1) + 36x^2 - 49$ ..... | <input type="text"/> |
| b) $25 - (10x+3)^2$ .....             | <input type="text"/> |
| c) $(6x-8)(4x-5) + 36x^2 - 64$ .....  | <input type="text"/> |
| d) $(-9x-8)(8x+8) + 64x^2 - 64$ ..... | <input type="text"/> |

**Calcul 3.4 — À l'aide de la forme canonique.**



Factoriser les polynômes de degré deux suivants en utilisant leur forme canonique. On rappelle que la forme canonique de  $ax^2 + bx + c$  est  $a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$  (où  $a \neq 0$ ).

- |                         |                      |                           |                      |
|-------------------------|----------------------|---------------------------|----------------------|
| a) $x^2 - 2x + 1$ ..... | <input type="text"/> | d) $3x^2 + 7x + 1$ .....  | <input type="text"/> |
| b) $x^2 + 4x + 4$ ..... | <input type="text"/> | e) $2x^2 + 3x - 28$ ..... | <input type="text"/> |
| c) $x^2 + 3x + 2$ ..... | <input type="text"/> | f) $-5x^2 + 6x - 1$ ..... | <input type="text"/> |

**Calcul 3.5 — Avec plusieurs variables.**



Factoriser sur  $\mathbb{R}$  les expressions polynomiales suivantes dont les variables représentent des nombres réels.

- |                                      |                      |  |                      |
|--------------------------------------|----------------------|--|----------------------|
| a) $(x + y)^2 - z^2$ .....           | <input type="text"/> | d) $xy - x - y + 1$ .....                  | <input type="text"/> |
| b) $x^2 + 6xy + 9y^2 - 169x^2$ ..... | <input type="text"/> | e) $x^3 + x^2y + 2x^2 + 2xy + x + y$ ..    | <input type="text"/> |
| c) $xy + x + y + 1$ .....            | <input type="text"/> | f) $y^2(a^2 + b^2) + 16x^4(-a^2 - b^2)$ .. | <input type="text"/> |

**Calcul 3.6 — On passe au niveau supérieur.**



Factoriser sur  $\mathbb{R}$  les expressions polynomiales suivantes dont les variables représentent des nombres réels.

- |   |                      |
|---|----------------------|
| a) $x^4 - 1$ .....  | <input type="text"/> |
| b) $(-9x^2 + 24)(8x^2 + 8) + 64x^4 - 64$ .....  | <input type="text"/> |
| c) $x^4 + x^2 + 1$ .....  | <input type="text"/> |
| d) $(ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$ .....  | <input type="text"/> |
| e) $(ap + bq + cr + ds)^2 + (aq - bp - cs + dr)^2 + (ar + bs - cp - dq)^2 + (as - br + cq - dp)^2$ .. | <input type="text"/> |

## Racines carrées

### Prérequis

Racines carrées. Méthode de la quantité conjuguée.

### Premiers calculs

#### Calcul 4.1 — Définition de la racine carrée.



Exprimer sans racine carrée les expressions suivantes.

a)  $\sqrt{(-5)^2}$  .....

d)  $\sqrt{(2 - \sqrt{7})^2}$  .....

b)  $\sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2}$  .....

e)  $\sqrt{(3 - \pi)^2}$  .....

c)  $\sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2}$  .....

f)  $\sqrt{(3 - a)^2}$  .....

#### Calcul 4.2 — Transformation d'écriture.



Écrire aussi simplement que possible les expressions suivantes.

a)  $(2\sqrt{5})^2$  .....

e)  $(3 + \sqrt{7})^2 - (3 - \sqrt{7})^2$  .....

b)  $(2 + \sqrt{5})^2$  .....

f)  $(\sqrt{2\sqrt{3}})^4$  .....

c)  $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$  .....

g)  $\left(\frac{5 - \sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2$  .....

d)  $\sqrt{11 + 6\sqrt{2}}$  .....

h)  $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 + (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2$  .....

### Avec la méthode de la quantité conjuguée

#### Calcul 4.3



Rendre rationnels les dénominateurs des expressions suivantes.

a)  $\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{2}}$  .....

e)  $\frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}$  .....

b)  $\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1}$  .....

f)  $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}$  .....

c)  $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$  .....

g)  $\frac{5 + 2\sqrt{6}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{5 - 2\sqrt{6}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}$  .....

d)  $\frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$  .....

h)  $\left(\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3} + 1}\right)^2$  .....

**Calcul 4.4**

Exprimer la quantité suivante sans racine carrée au dénominateur.

$$\frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}} \dots\dots\dots \boxed{\phantom{000}}$$

**Calculs variés****Calcul 4.5 — Avec une variable.**On considère la fonction  $f$  qui à  $x > 1$  associe  $f(x) = \sqrt{x-1}$ . Pour tout  $x > 1$ , calculer et simplifier les expressions suivantes.

- |  |                      |                                |                      |
|--|----------------------|--------------------------------|----------------------|
| a) $f(x) + \frac{1}{f(x)}$ .....               | <input type="text"/> | d) $\frac{f'(x)}{f(x)}$ .....  | <input type="text"/> |
| b) $\frac{f(x+2) - f(x)}{f(x+2) + f(x)}$ ..... | <input type="text"/> | e) $f(x) + 4f''(x)$ .....      | <input type="text"/> |
| c) $\sqrt{x + 2f(x)}$ .....                    | <input type="text"/> | f) $\frac{f(x)}{f''(x)}$ ..... | <input type="text"/> |

**Calcul 4.6 — Mettre au carré.**

Élever les quantités suivantes au carré pour en donner une expression simplifiée.

- |  |                      |  |                      |
|--|----------------------|--|----------------------|
| a) $\sqrt{3 + \sqrt{5}} - \sqrt{3 - \sqrt{5}}$ ..... | <input type="text"/> | b) $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} + \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$ ..... | <input type="text"/> |
|--|----------------------|--|----------------------|

**Calcul 4.7 — Méli-mélo.**

Donner une écriture simplifiée des réels suivants.

- |   |                      |  |                      |
|---|----------------------|--|----------------------|
| a) $\frac{3 - \sqrt{5}}{2 + \sqrt{5}}$ .....        | <input type="text"/> | d) $3 \exp^{-\frac{1}{2} \ln 3}$ .....                       | <input type="text"/> |
| b) $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$ .....                     | <input type="text"/> | e) $2\sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}}$ .....                    | <input type="text"/> |
| c) $\sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}}$ ..... | <input type="text"/> | f) $\frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1}$ ..... | <input type="text"/> |

**Calcul 4.8**

Simplifier  $\sqrt[3]{3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}} - \sqrt[3]{-3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}}$ .

On commencera par exprimer  $A^3$  en fonction de  $A$ . .....

## Expressions algébriques

**Prérequis**

Identités remarquables.

### Équations polynomiales

**Calcul 5.1 — Cubique.**



Soit  $a$  un nombre réel tel que  $a^3 - a^2 + 1 = 0$ .

Exprimer les quantités suivantes sous la forme  $xa^2 + ya + z$  où  $x, y, z$  sont trois nombres rationnels.

- |   |   |
|---|---|
| a) $(a + 2)^3$ ..... <input style="width: 150px; height: 20px;" type="text"/> | c) $a^{12}$ ..... <input style="width: 150px; height: 20px;" type="text"/>                      |
| b) $a^5 - a^6$ ..... <input style="width: 150px; height: 20px;" type="text"/> | d) $\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2}$ ..... <input style="width: 150px; height: 20px;" type="text"/> |

**Calcul 5.2 — Introduction aux nombres complexes.**



Soit  $i$  un nombre tel que  $i^2 = -1$ .

Exprimer les quantités suivantes sous la forme  $x + iy$  où  $x, y$  sont deux réels.

- |   |  |
|---|--|
| a) $(3 + i)^2$ ..... <input style="width: 150px; height: 20px;" type="text"/> | c) $(3 - i)^3$ ..... <input style="width: 150px; height: 20px;" type="text"/>  |
| b) $(3 - i)^2$ ..... <input style="width: 150px; height: 20px;" type="text"/> | d) $(3 - 2i)^3$ ..... <input style="width: 150px; height: 20px;" type="text"/> |

**Calcul 5.3**



Même exercice.

- |  |  |
|--|--|
| a) $(4 - 5i)(6 + 3i)$ ..... <input style="width: 150px; height: 20px;" type="text"/>     | c) $(-4 + i\sqrt{5})^3$ ..... <input style="width: 150px; height: 20px;" type="text"/>                     |
| b) $(2 + 3i)^3(2 - 3i)^3$ ..... <input style="width: 150px; height: 20px;" type="text"/> | d) $(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})^3$ ..... <input style="width: 150px; height: 20px;" type="text"/> |

**Calcul 5.4 — Puissance cinquième.**



Soit  $a$  un nombre distinct de 1 tel que  $a^5 = 1$ . Calculer les nombres suivants :

- |   |  |
|---|--|
| a) $a^7 - 3a^6 + 4a^5 - a^2 + 3a - 1$ .....                         | <input style="width: 150px; height: 20px;" type="text"/> |
| b) $a^{1234} \times a^{2341} \times a^{3412} \times a^{4123}$ ..... | <input style="width: 150px; height: 20px;" type="text"/> |
| c) $\prod_{k=0}^{1234} a^k$ .....                                   | <input style="width: 150px; height: 20px;" type="text"/> |
| d) $1 + a + a^2 + a^3 + a^4$ .....                                  | <input style="width: 150px; height: 20px;" type="text"/> |
| e) $\sum_{k=1}^{99} a^k$ .....                                      | <input style="width: 150px; height: 20px;" type="text"/> |
| f) $\prod_{k=0}^4 (2 - a^k)$ .....                                  | <input style="width: 150px; height: 20px;" type="text"/> |



# Expressions symétriques

## Calcul 5.5 — Inverse.



Soient  $x$  un réel non nul. On pose  $a = x - \frac{1}{x}$ . Exprimer les quantités suivantes en fonction de  $a$  uniquement.

- a)  $x^2 + \frac{1}{x^2}$  ....       b)  $x^3 - \frac{1}{x^3}$  ....       c)  $x^4 + \frac{1}{x^4}$  ....

## Calcul 5.6 — Trois variables.



Soient  $x, y, z$  trois nombres deux à deux distincts. On pose

$$a = x + y + z, \quad b = xy + yz + zx \quad \text{et} \quad c = xyz.$$

Exprimer les quantités suivantes en fonction de  $a, b, c$  uniquement.

- a)  $x^2 + y^2 + z^2$  .....
- b)  $x^2(y + z) + y^2(z + x) + z^2(x + y)$  .....
- c)  $x^3 + y^3 + z^3$  .....
- d)  $(x + y)(y + z)(z + x)$  .....
- e)  $x^2yz + y^2zx + z^2xy$  .....
- f)  $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2$  .....

## Calcul 5.7



Même exercice.

- a)  $x^3(y + z) + y^3(z + x) + z^3(x + y)$  .....
- b)  $x^4 + y^4 + z^4$  .....
- c)  $\frac{x}{(x - y)(x - z)} + \frac{y}{(y - z)(y - x)} + \frac{z}{(z - x)(z - y)}$  .....
- d)  $\frac{x^2}{(x - y)(x - z)} + \frac{y^2}{(y - z)(y - x)} + \frac{z^2}{(z - x)(z - y)}$  .....
- e)  $\frac{x^3}{(x - y)(x - z)} + \frac{y^3}{(y - z)(y - x)} + \frac{z^3}{(z - x)(z - y)}$  .....

## Équations du second degré

### Prérequis

Relations entre coefficients et racines.

Dans cette fiche :

- tous les trinômes considérés sont réels ;
- on ne s'intéresse qu'à leurs éventuelles **racines réelles** ;
- tous les paramètres sont choisis de telle sorte que l'équation considérée soit bien de degré 2.

Les formules donnant explicitement les racines d'une équation du second degré en fonction du discriminant **ne servent nulle part** dans cette fiche d'exercices !

## Recherche de racines

### Calcul 6.1 — Des racines vraiment évidentes.



Résoudre mentalement les équations suivantes. *Les racines évidentes sont à chercher parmi 0, 1, -1, 2, -2 ainsi éventuellement que 3 et -3.*

- |  |  |
|--|--|
| a) $x^2 - 6x + 9 = 0$ ..... <input style="width: 80px; height: 25px;" type="text"/>  | f) $2x^2 + 3x = 0$ ..... <input style="width: 80px; height: 25px;" type="text"/>       |
| b) $9x^2 + 6x + 1 = 0$ ..... <input style="width: 80px; height: 25px;" type="text"/> | g) $2x^2 + 3 = 0$ ..... <input style="width: 80px; height: 25px;" type="text"/>        |
| c) $x^2 + 4x - 12 = 0$ ..... <input style="width: 80px; height: 25px;" type="text"/> | h) $x^2 + 4x - 5 = 0$ ..... <input style="width: 80px; height: 25px;" type="text"/>    |
| d) $x^2 - 5x + 6 = 0$ ..... <input style="width: 80px; height: 25px;" type="text"/>  | i) $3x^2 - 11x + 8 = 0$ ..... <input style="width: 80px; height: 25px;" type="text"/>  |
| e) $x^2 - 5x = 0$ ..... <input style="width: 80px; height: 25px;" type="text"/>      | j) $5x^2 + 24x + 19 = 0$ ..... <input style="width: 80px; height: 25px;" type="text"/> |

### Calcul 6.2 — Somme et produit.



Résoudre mentalement les équations suivantes.

- |   |  |
|---|--|
| a) $x^2 - 13x + 42 = 0$ ..... <input style="width: 80px; height: 25px;" type="text"/> | d) $x^2 - 8x - 33 = 0$ ..... <input style="width: 80px; height: 25px;" type="text"/>         |
| b) $x^2 + 8x + 15 = 0$ ..... <input style="width: 80px; height: 25px;" type="text"/>  | e) $x^2 - (a + b)x + ab = 0$ ..... <input style="width: 80px; height: 25px;" type="text"/>   |
| c) $x^2 + 18x + 77 = 0$ ..... <input style="width: 80px; height: 25px;" type="text"/> | f) $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$ ..... <input style="width: 80px; height: 25px;" type="text"/> |

### Calcul 6.3 — L'une grâce à l'autre.



Calculer la seconde racine des équations suivantes.

- |   |   |
|---|---|
| a) $3x^2 - 14x + 8 = 0$ sachant que $x = 4$ est racine .....                  | <input style="width: 100%; height: 25px;" type="text"/> |
| b) $7x^2 + 23x + 6 = 0$ sachant que $x = -3$ est racine .....                 | <input style="width: 100%; height: 25px;" type="text"/> |
| c) $mx^2 + (2m + 1)x + 2 = 0$ sachant que $x = -2$ est racine .....           | <input style="width: 100%; height: 25px;" type="text"/> |
| d) $(m + 3)x^2 - (m^2 + 5m)x + 2m^2 = 0$ sachant que $x = m$ est racine ..... | <input style="width: 100%; height: 25px;" type="text"/> |

**Calcul 6.4 — Racine évidente.**



Trouver une racine des équations suivantes et calculer l'autre en utilisant les relations entre les coefficients du trinôme et ses racines.

**Seuls les deux derniers calculs ne se font pas de tête.**

- a)  $(b - c)x^2 + (c - a)x + (a - b) = 0$  .....
- b)  $a(b - c)x^2 + b(c - a)x + c(a - b) = 0$  .....
- c)  $(x + a)(x + b) = (m + a)(m + b)$  .....
- d)  $(b - c)x^2 + (c - a)mx + (a - b)m^2 = 0$  .....
- e)  $\frac{x}{a} + \frac{b}{x} = \frac{m}{a} + \frac{b}{m}$  .....
- f)  $\frac{1}{x - a} + \frac{1}{x - b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$  .....

## Recherche d'équations

**Calcul 6.5 — À la recherche de l'équation.**



En utilisant la somme et le produit des racines d'une équation du second degré, former l'équation du second degré admettant comme racines les nombres suivants.

- a) 9 et 13 .....
- b) -11 et 17 .....
- c)  $2 + \sqrt{3}$  et  $2 - \sqrt{3}$  .....
- d)  $m + \sqrt{m^2 - 3}$  et  $m - \sqrt{m^2 - 3}$  .....
- e)  $m + 3$  et  $\frac{2m - 5}{2}$  .....
- f)  $\frac{m + 1}{m}$  et  $\frac{m - 2}{m}$  .....

**Calcul 6.6 — Avec le discriminant.**



Déterminer la valeur à donner à  $m$  pour que les équations suivantes admettent une racine double, et préciser la valeur de la racine dans ce cas.

- a)  $x^2 - (2m + 3)x + m^2 = 0$  .....
- b)  $(m + 2)x^2 - 2(m - 1)x + 4 = 0$  .....
- c)  $(m + 3)x^2 + 2(3m + 1)x + (m + 3) = 0$  .....

## Factorisations et signe

### Calcul 6.7 — Factorisation à vue.



Déterminer de tête les valeurs des paramètres  $a$  et  $b$  pour que les égalités suivantes soient vraies pour tout  $x$ .

a)  $2x^2 + 7x + 6 = (x + 2)(ax + b)$  .....

b)  $-4x^2 + 4x - 1 = (2x - 1)(ax + b)$  .....

c)  $-3x^2 + 14x - 15 = (x - 3)(ax + b)$  .....

d)  $\frac{1}{2}x^2 + \frac{11}{2}x - 40 = (x - 5)(ax + b)$  .....

e)  $x^2 + 2\sqrt{7}x - 21 = (x - \sqrt{7})(ax + b)$  .....

### Calcul 6.8 — Signe d'un trinôme.



Déterminer l'ensemble des valeurs de  $x$  pour lesquelles les expressions suivantes sont positives ou nulles.

a)  $x^2 - (\sqrt{2} + 1)x + \sqrt{2}$  .....

b)  $-x^2 + 2x + 15$  .....

c)  $(x + 1)(3x - 2)$  .....

d)  $\frac{x - 4}{2x + 1}$  .....



# Exponentielles

## Calcul 7.5



Écrire les nombres suivants le plus simplement possible.

- |                                 |                      |                                  |                      |
|---------------------------------|----------------------|----------------------------------|----------------------|
| a) $e^{3 \ln 2}$ .....          | <input type="text"/> | d) $e^{-2 \ln 3}$ .....          | <input type="text"/> |
| b) $\ln(\sqrt{e})$ .....        | <input type="text"/> | e) $\ln(e^{-\frac{1}{2}})$ ..... | <input type="text"/> |
| c) $\ln(e^{\frac{1}{3}})$ ..... | <input type="text"/> | f) $e^{\ln 3 - \ln 2}$ .....     | <input type="text"/> |

## Calcul 7.6



Écrire les nombres suivants le plus simplement possible.

- |   |                      |  |                      |
|---|----------------------|--|----------------------|
| a) $-e^{-\ln \frac{1}{2}}$ .....            | <input type="text"/> | d) $\ln(\sqrt{e^4}) - \ln(\sqrt{e^2})$ .....         | <input type="text"/> |
| b) $e^{-\ln \ln 2}$ .....                   | <input type="text"/> | e) $\ln(\sqrt{\exp(-\ln e^2)})$ .....                | <input type="text"/> |
| c) $\ln\left(\frac{1}{e^{17}}\right)$ ..... | <input type="text"/> | f) $\exp\left(-\frac{1}{3} \ln(e^{-3})\right)$ ..... | <input type="text"/> |

# Études de fonctions

## Calcul 7.7 — Parité.



Étudier la parité des fonctions suivantes.

- |  |                      |
|--|----------------------|
| a) $f_1 : x \mapsto \ln \frac{2021 + x}{2021 - x}$ .....     | <input type="text"/> |
| b) $f_2 : x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ .....           | <input type="text"/> |
| c) $f_3 : x \mapsto \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$ .....     | <input type="text"/> |
| d) $f_4 : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ ..... | <input type="text"/> |

## Calcul 7.8 — Étude d'une fonction.



Soit  $f : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ .

- |   |                      |
|---|----------------------|
| a) Préciser l'ensemble de définition de cette fonction. ....                                      | <input type="text"/> |
| b) Montrer que pour tous réels $a$ et $b$ on a $f(a+b) = \frac{f(a) + f(b)}{1 + f(a)f(b)}$ . .... | <input type="text"/> |
| c) Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$ . ....  | <input type="text"/> |
| d) Déterminer la limite de $f$ en $-\infty$ . ....  | <input type="text"/> |

### Calcul 7.9



On considère l'application

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \ln(1+x) \end{cases}$$

Calculer et simplifier les expressions suivantes pour tout  $x \in \mathbb{R}$  pour lequel elles sont définies.

- a)  $f(2e^x - 1)$  .....       d)  $xf'(x) - 1$  .....
- b)  $e^{x - \frac{1}{2}f(x)}$  .....       e)  $e^{\frac{f(x)}{f'(x-1)}}$  .....
- c)  $\frac{1}{2}f(x^2 - 2x)$  .....

## Équations, inéquations

### Calcul 7.10



Résoudre les équations ou inéquations suivantes.

- a)  $e^{3x-5} \geq 12$  .....
- b)  $1 \leq e^{-x^2+x}$  .....
- c)  $e^{1+\ln x} \geq 2$  .....
- d)  $e^{-6x} \leq \sqrt{e}$  .....
- e)  $\ln(-x-5) = \ln(x-61) - \ln(x+7)$  .....
- f)  $\ln(-x-5) = \ln \frac{x-61}{x+7}$  .....

# Dérivation

## Prérequis

Dérivées des fonctions usuelles. Formules de dérivation.

## Application des formules usuelles

### Calcul 9.1 — Avec des produits.



Déterminer l'expression de  $f'(x)$  pour  $f$  définie par :

a)  $x \in \mathbb{R}$  et  $f(x) = (x^2 + 3x + 2)(2x - 5)$ . .....

b)  $x \in \mathbb{R}$  et  $f(x) = (x^3 + 3x + 2)(x^2 - 5)$ . .....

c)  $x \in \mathbb{R}$  et  $f(x) = (x^2 - 2x + 6) \exp(2x)$ . .....

d)  $x \in ]2, +\infty[$  et  $f(x) = (3x^2 - x) \ln(x - 2)$  .....

### Calcul 9.2 — Avec des puissances.



Déterminer l'expression de  $f'(x)$  pour  $f$  définie par :

a)  $x \in \mathbb{R}$  et  $f(x) = (x^2 - 5x)^5$ . .....

b)  $x \in \mathbb{R}$  et  $f(x) = (2x^3 + 4x - 1)^2$ . .....

c)  $x \in \mathbb{R}$  et  $f(x) = (\sin(x) + 2 \cos(x))^2$ . .....

d)  $x \in \mathbb{R}$  et  $f(x) = (3 \cos(x) - \sin(x))^3$ . .....

### Calcul 9.3 — Avec des fonctions composées.



Déterminer l'expression de  $f'(x)$  pour  $f$  définie par :

a)  $x \in \mathbb{R}$  et  $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ . .....

b)  $x \in ]1, +\infty[$  et  $f(x) = \ln(\ln(x))$ . .....

c)  $x \in \mathbb{R}$  et  $f(x) = (2 - x) \exp(x^2 + x)$ . .....

d)  $x \in \mathbb{R}$  et  $f(x) = \exp(3 \sin(2x))$ . .....



**Calcul 9.4 — Avec des fonctions composées — bis.**



Déterminer l'expression de  $f'(x)$  pour  $f$  définie par :

a)  $x \in \mathbb{R}$  et  $f(x) = \sin\left(\frac{2x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)$ . .....

b)  $x \in \mathbb{R}$  et  $f(x) = \cos\left(\frac{2x + 1}{x^2 + 4}\right)$ . .....

c)  $x \in ]0, \pi[$  et  $f(x) = \sqrt{\sin(x)}$ . .....

d)  $x \in ]0, +\infty[$  et  $f(x) = \sin(\sqrt{x})$ . .....

**Calcul 9.5 — Avec des quotients.**



Déterminer l'expression de  $f'(x)$  pour  $f$  définie par :

a)  $x \in \mathbb{R}$  et  $f(x) = \frac{x^2 + 3x}{2 \sin(x) + 3}$ . .....

b)  $x \in ]0, +\infty[$  et  $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{3x + 2}$ . .....

c)  $x \in \mathbb{R}$  et  $f(x) = \frac{\cos(2x + 1)}{x^2 + 1}$ . .....

d)  $x \in ]1, +\infty[$  et  $f(x) = \frac{2x^2 + 3x}{\ln(x)}$ . .....

## Opérations et fonctions composées

**Calcul 9.6**



Déterminer l'expression de  $f'(x)$  pour  $f$  définie par :

a)  $x \in \mathbb{R}^*$  et  $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ . .....

b)  $x \in ]-3, 3[$  et  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}$ . .....

c)  $x \in ]1, +\infty[$  et  $f(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\right)$ . .....

d)  $x \in ]0, \pi[$  et  $f(x) = \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$ . .....

## Dériver pour étudier une fonction

### Calcul 9.7



Calculer  $f'(x)$  et écrire le résultat sous forme factorisée.

a)  $x \in \mathbb{R} \setminus \{3, -2\}$  et  $f(x) = \frac{1}{3-x} + \frac{1}{2+x}$ . .....

b)  $x \in ]-1, +\infty[$  et  $f(x) = x^2 - \ln(x+1)$  .....

c)  $x \in ]1, +\infty[$  et  $f(x) = \ln(x^2 + x - 2) - \frac{x+2}{x-1}$ . .....

d)  $x \in ]-1, +\infty[$  et  $f(x) = \frac{x}{x+1} + x - 2\ln(x+1)$ . .....

e)  $x \in ]0, e[ \cup ]e, +\infty[$  et  $f(x) = \frac{1 + \ln(x)}{1 - \ln(x)}$ . .....

## Primitives

### Prérequis

Intégration de Terminale. Dérivée d'une fonction composée.  
Trigonométrie directe et réciproque. Trigonométrie hyperbolique.

Pour chaque fonction à intégrer on pourra commencer par chercher les domaines où elle admet des primitives.

### Calculs directs

#### Calcul 10.1



Déterminer directement une primitive des expressions suivantes.

a)  $\frac{1}{t+1}$  .....

c)  $\frac{3}{(t+2)^3}$  .....

b)  $\frac{3}{(t+2)^2}$  .....

d)  $\sin(4t)$  .....

#### Calcul 10.2



Même exercice.

a)  $\sqrt{1+t} - \sqrt[3]{t}$  .....

c)  $\frac{1}{\sqrt{1-4t^2}}$  .....

b)  $e^{2t+1}$  .....

d)  $\frac{1}{1+9t^2}$  .....

### Utilisation des formulaires

#### Calcul 10.3 — Dérivée d'une fonction composée.



Déterminer une primitive des expressions suivantes en reconnaissant la dérivée d'une fonction composée.

a)  $\frac{2t^2}{1+t^3}$  .....

d)  $\frac{7t}{\sqrt[3]{1+7t^2}}$  .....

b)  $t\sqrt{1+2t^2}$  .....

e)  $\frac{t}{1+3t^2}$  .....

c)  $\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$  .....

f)  $\frac{12t}{(1+3t^2)^3}$  .....

#### Calcul 10.4 — Dérivée d'une fonction composée — bis.



Même exercice.

a)  $\frac{\ln^3 t}{t}$  .....

d)  $\frac{1}{t^2\sqrt{t}}$  .....

b)  $\frac{1}{t\sqrt{\ln t}}$  .....

e)  $\frac{e^t + e^{-t}}{1 - e^{-t} + e^t}$  .....

c)  $\frac{8e^{2t}}{(3 - e^{2t})^3}$  .....

f)  $\frac{e^{\frac{1}{t}}}{t^2}$  .....

**Calcul 10.5 — Trigonométrie.**



Déterminer une primitive des expressions suivantes en reconnaissant la dérivée d'une fonction composée.

- |   |                      |  |                      |  |                      |
|---|----------------------|--|----------------------|--|----------------------|
| a) $\cos^2 t \sin t \dots\dots$                     | <input type="text"/> | g) $\tan^2 t \dots\dots\dots$                      | <input type="text"/> | l) $\frac{\cos t}{(1 - \sin t)^3} \dots\dots$                | <input type="text"/> |
| b) $\cos(t)e^{\sin t} \dots\dots$                   | <input type="text"/> | h) $\tan^3 t \dots\dots\dots$                      | <input type="text"/> | m) $\frac{1}{1 + 4t^2} \dots\dots\dots$                      | <input type="text"/> |
| c) $\tan t \dots\dots\dots$                         | <input type="text"/> | i) $\frac{\tan^3 t}{\cos^2 t} \dots\dots\dots$     | <input type="text"/> | n) $\frac{e^t}{1 + e^{2t}} \dots\dots\dots$                  | <input type="text"/> |
| d) $\frac{\cos t}{1 - \sin t} \dots\dots\dots$      | <input type="text"/> | j) $\frac{1}{\cos^2(t)\sqrt{\tan t}} \dots\dots$   | <input type="text"/> | o) $\frac{\text{Arcsin}(t)}{\sqrt{1 - t^2}} \dots\dots\dots$ | <input type="text"/> |
| e) $\frac{\sin \sqrt{t}}{\sqrt{t}} \dots\dots\dots$ | <input type="text"/> | k) $\frac{1 + \tan^2 t}{\tan^2 t} \dots\dots\dots$ | <input type="text"/> | p) $\frac{1}{\sqrt{1 - t^2} \text{Arcsin}(t)} \dots\dots$    | <input type="text"/> |
| f) $\frac{\cos(\pi \ln t)}{t} \dots\dots\dots$      | <input type="text"/> |  |                      |  |                      |

**Calcul 10.6 — Trigonométrie – bis.**



Déterminer une primitive des expressions suivantes en utilisant d'abord le formulaire de trigonométrie.

- |                                  |                      |  |                      |   |                      |
|----------------------------------|----------------------|--|----------------------|---|----------------------|
| a) $\cos^2 t \dots\dots\dots$    | <input type="text"/> | d) $\frac{\sin(2t)}{1 + \sin^2 t} \dots\dots\dots$ | <input type="text"/> | f) $\frac{1}{\sin^2(t) \cos^2(t)} \dots\dots$ | <input type="text"/> |
| b) $\cos(t) \sin(3t) \dots\dots$ | <input type="text"/> | e) $\frac{1}{\sin t \cos t} \dots\dots\dots$       | <input type="text"/> | g) $\frac{1}{\sin(4t)} \dots\dots\dots$       | <input type="text"/> |
| c) $\sin^3 t \dots\dots\dots$    | <input type="text"/> |  |                      |   |                      |

**Calcul 10.7 — Fractions rationnelles.**



Déterminer une primitive des expressions suivantes après quelques manipulations algébriques simples.

- |  |                      |  |                      |  |                      |
|--|----------------------|--|----------------------|--|----------------------|
| a) $\frac{t^2 + t + 1}{t^2} \dots\dots\dots$ | <input type="text"/> | d) $\frac{t^3 + 1}{t + 1} \dots\dots\dots$ | <input type="text"/> | g) $\frac{t - 1}{t^2 + 1} \dots\dots\dots$ | <input type="text"/> |
| b) $\frac{t^2 + 1}{t^3} \dots\dots\dots$     | <input type="text"/> | e) $\frac{t - 1}{t + 1} \dots\dots\dots$   | <input type="text"/> | h) $\frac{t}{(t + 1)^2} \dots\dots\dots$   | <input type="text"/> |
| c) $\frac{1 - t^6}{1 - t^2} \dots\dots\dots$ | <input type="text"/> | f) $\frac{t^3}{t + 1} \dots\dots\dots$     | <input type="text"/> |  |                      |

## Dériver puis intégrer, intégrer puis dériver

**Calcul 10.8**



Pour chacune des expressions suivantes :

- dériver puis factoriser l'expression ;
- intégrer l'expression.

- |  |                      |   |                      |
|--|----------------------|---|----------------------|
| a) $t^2 - 2t + 5 \dots\dots$                             | <input type="text"/> | e) $e^{2t} + e^{-3t} \dots\dots$            | <input type="text"/> |
| b) $\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t} \dots\dots\dots$         | <input type="text"/> | f) $e^{3t-2} \dots\dots\dots$               | <input type="text"/> |
| c) $\sqrt{t} - \frac{1}{t^3} \dots\dots\dots$            | <input type="text"/> | g) $\frac{t^2}{t^3 - 1} \dots\dots\dots$    | <input type="text"/> |
| d) $\frac{1}{t^4} + \frac{1}{t\sqrt{t}} \dots\dots\dots$ | <input type="text"/> | h) $\frac{3t - 1}{t^2 + 1} \dots\dots\dots$ | <input type="text"/> |

- |   |                      |   |                      |
|---|----------------------|---|----------------------|
| i) $\sin(t) \cos^2(t) \dots$                        | <input type="text"/> | o) $\frac{\sin 2t}{1 + \cos^2 t} \dots\dots\dots$ | <input type="text"/> |
| j) $\sinh(t) \cosh(t) \dots$                        | <input type="text"/> | p) $te^{-t^2} \dots\dots\dots$                    | <input type="text"/> |
| k) $\frac{1}{t^2} \sin \frac{1}{t} \dots\dots\dots$ | <input type="text"/> | q) $\frac{1 - \ln t}{t} \dots\dots\dots$          | <input type="text"/> |
| l) $\frac{e^t}{2 + e^t} \dots\dots\dots$            | <input type="text"/> | r) $\frac{1}{t \ln t} \dots\dots\dots$            | <input type="text"/> |
| m) $\frac{\sin t}{2 + 3 \cos t} \dots\dots\dots$    | <input type="text"/> | s) $\frac{\sin(\ln t)}{t} \dots\dots\dots$        | <input type="text"/> |
| n) $\frac{t}{\sqrt{1 - t^2}} \dots\dots\dots$       | <input type="text"/> | t) $\frac{e^t}{1 + e^{2t}} \dots\dots\dots$       | <input type="text"/> |

**Calcul 10.9 — *Bis repetita.***



Reprenre l'exercice précédent en commençant par intégrer puis en dérivant et factorisant.

**Prérequis**

Primitives usuelles, composées simples.

## Intégrales et aires algébriques

On rappelle que  $\int_a^b f(x) dx$  est l'aire algébrique entre la courbe représentative de  $f$  et l'axe des abscisses du repère lorsque les bornes sont « dans le bon sens ».

### Calcul 11.1



Sans chercher à calculer les intégrales suivantes, donner leur signe.

a)  $\int_{-2}^3 x^2 + e^x dx$  .       b)  $\int_5^{-3} |\sin 7x| dx$        c)  $\int_0^{-1} \sin x dx$  ...

### Calcul 11.2



En se ramenant à des aires, calculer de tête les intégrales suivantes.

a)  $\int_1^3 7 dx$  .....       c)  $\int_0^7 3x dx$  .....       e)  $\int_{-2}^2 \sin x dx$  ....   
 b)  $\int_7^{-3} -5 dx$  .....       d)  $\int_2^8 1 - 2x dx$  ..       f)  $\int_{-2}^1 |x| dx$  .....

## Calcul d'intégrales

On rappelle que si  $F$  est une primitive de  $f$  alors  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ , que l'on note  $\left[ F(x) \right]_a^b$ .

### Calcul 11.3 — Polynômes.



Calculer les intégrales suivantes.

a)  $\int_{-1}^3 2 dx$  .....       d)  $\int_{-1}^1 3x^5 - 5x^3 dx$  .....   
 b)  $\int_1^3 2x - 5 dx$  .....       e)  $\int_0^1 x^5 - x^4 dx$  .....   
 c)  $\int_{-2}^0 x^2 + x + 1 dx$  .....       f)  $\int_1^{-1} x^{100} dx$  .....

### Calcul 11.4 — Fonctions usuelles.



Calculer.

a)  $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \sin x dx$  ...       c)  $\int_1^2 \frac{dx}{x^2}$  .....       e)  $\int_{-3}^2 e^x dx$  .....   
 b)  $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos x dx$  ...       d)  $\int_1^{100} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$  ...       f)  $\int_{-3}^{-1} \frac{dx}{x}$  .....

**Calcul 11.5 — De la forme  $f(ax + b)$ .**



Calculer les intégrales suivantes.

- |  |                      |  |                      |
|--|----------------------|--|----------------------|
| a) $\int_{-1}^2 (2x + 1)^3 dx$ .....         | <input type="text"/> | d) $\int_{-\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} \sin(3x) dx$ .....                | <input type="text"/> |
| b) $\int_{-2}^4 e^{\frac{1}{2}x+1} dx$ ..... | <input type="text"/> | e) $\int_0^{33} \frac{1}{\sqrt{3x+1}} dx$ .....                              | <input type="text"/> |
| c) $\int_0^1 \frac{dx}{\pi x + 2}$ .....     | <input type="text"/> | f) $\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) dx$ ..... | <input type="text"/> |

**Calcul 11.6 — Fonctions composées.**



Calculer les intégrales suivantes.

- |   |                      |   |                      |
|---|----------------------|---|----------------------|
| a) $\int_1^3 \frac{x-2}{x^2-4x+5} dx$ .....                         | <input type="text"/> | d) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x (\cos x)^5 dx$ ..... | <input type="text"/> |
| b) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x \sin(x^2 + 1) dx$ ..... | <input type="text"/> | e) $\int_0^1 x e^{x^2-1} dx$ .....                                    | <input type="text"/> |
| c) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \tan x dx$ .....                         | <input type="text"/> | f) $\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^4} dx$ .....                            | <input type="text"/> |

**Calcul 11.7 — Divers.**



Calculer les intégrales suivantes.

- |  |                      |   |                      |
|--|----------------------|---|----------------------|
| a) $\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x} + 2e^x + 1} dx$ ..... | <input type="text"/> | d) $\int_1^e \frac{3x - 2 \ln x}{x} dx$ .....                       | <input type="text"/> |
| b) $\int_{-2}^3  x + 1  dx$ .....                    | <input type="text"/> | e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x) \sin(x) dx$ .....               | <input type="text"/> |
| c) $\int_{-1}^2 \max(1, e^x) dx$ .....               | <input type="text"/> | f) $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}}  \cos x \sin x  dx$ ..... | <input type="text"/> |

**Calcul 11.8 — Avec les nouvelles fonctions de référence.**



- |  |                      |  |                      |
|--|----------------------|--|----------------------|
| a) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \text{Arcsin } x dx$ ..... | <input type="text"/> | d) $\int_0^1 \text{ch } x dx$ .....                        | <input type="text"/> |
| b) $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$ .....                               | <input type="text"/> | e) $\int_0^1 \sqrt{x} dx$ .....                            | <input type="text"/> |
| c) $\int_0^2 10^x dx$ .....  | <input type="text"/> | f) $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{2}{1+9x^2} dx$ ..... | <input type="text"/> |

## Intégration par parties

**Prérequis**

Primitives, dérivées, intégration par parties.

On rappelle le théorème d'intégration par parties. Si  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , si  $u \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$  et si  $v \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$ , alors

$$\int_a^b u'(t)v(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t) dt.$$

### Intégrales

**Calcul 12.1**



Calculer :

- |  |  |
|--|--|
| <p>a) <math>\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cos t dt</math> ..... <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/></p> <p>b) <math>\int_0^1 (2t + 3)\text{sh}(2t) dt</math> ..... <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/></p> <p>c) <math>\int_0^2 te^{\frac{t}{2}} dt</math> ..... <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/></p> <p>d) <math>\int_1^{\ln 2} t2^t dt</math> ..... <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/></p> <p>e) <math>\int_1^e \ln t dt</math> ..... <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/></p> <p>f) <math>\int_1^2 t \ln t dt</math> ..... <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/></p> | <p>g) <math>\int_0^1 \ln(1 + t^2) dt</math> ..... <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/></p> <p>h) <math>\int_0^1 t \arctan t dt</math> ..... <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/></p> <p>i) <math>\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin t dt</math> ..... <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/></p> <p>j) <math>\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t}} dt</math> ..... <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/></p> <p>k) <math>\int_0^1 \sqrt{1+t} \ln(1+t) dt</math> ..... <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/></p> <p>l) <math>\int_0^{\frac{\pi}{4}} t \tan^2 t dt</math> ..... <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/></p> |
|--|--|

### Primitives

**Calcul 12.2**



Pour chaque fonction suivante, préciser sur quel ensemble elle est définie, puis en déterminer une primitive.

- |   |  |
|---|--|
| <p>a) <math>x \mapsto (-x + 1)e^x</math> ..... <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/></p> <p>b) <math>x \mapsto \frac{\ln x}{x^2}</math> ..... <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/></p> | <p>c) <math>x \mapsto \arctan(x)</math> ..... <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/></p> <p>d) <math>x \mapsto x\text{ch}(x)</math> ..... <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/></p> |
|---|--|



## Intégrations par parties successives

Pour ces calculs de primitives et d'intégrales, on pourra réaliser plusieurs intégrations par parties successives.

### Calcul 12.3 — Calcul d'intégrales.



a)  $\int_0^1 (t^2 + 3t - 4)e^{2t} dt \dots\dots\dots$

b)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t \sin t dt \dots\dots\dots$

### Calcul 12.4 — Calcul de primitives.



Calculer des primitives des fonctions suivantes.

a)  $x \mapsto \sin(x)\operatorname{sh}(x) \dots\dots$

c)  $x \mapsto (x \ln x)^2 \dots\dots\dots$

b)  $x \mapsto \ln^2 x \dots\dots\dots$

d)  $x \mapsto e^{\arccos(x)} \dots\dots\dots$

## Changements de variable

### Prérequis

Primitives, dérivées. Changements de variables. Intégration par parties.

## Changements de variable

### Calcul 13.1



Effectuer le changement de variable indiqué et en déduire la valeur de l'intégrale.

- |    |   |                              |                      |
|----|---|------------------------------|----------------------|
| a) | $\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} dt$                 | avec $t = \sin \theta$ ..... | <input type="text"/> |
| b) | $\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{t} + \sqrt{t^3}} dt$ | avec $u = \sqrt{t}$ .....    | <input type="text"/> |
| c) | $\int_0^1 \frac{1}{\operatorname{ch} t} dt$   | avec $u = e^t$ .....         | <input type="text"/> |
| d) | $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \cos t dt$   | avec $u = \sin t$ .....      | <input type="text"/> |
| e) | $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \cos^3 t dt$ | avec $u = \sin t$ .....      | <input type="text"/> |
| f) | $\int_1^4 \frac{1}{t + \sqrt{t}} dt$          | avec $u = \sqrt{t}$ .....    | <input type="text"/> |

### Calcul 13.2



Même exercice.

- |    |  |                                  |                      |
|----|--|----------------------------------|----------------------|
| a) | $\int_0^\pi \frac{\sin t}{3 + \cos^2 t} dt$    | avec $u = \cos t$ .....          | <input type="text"/> |
| b) | $\int_0^1 \frac{1}{2 + e^{-t}} dt$             | avec $u = e^t$ .....             | <input type="text"/> |
| c) | $\int_2^4 \frac{1}{\sqrt{4t-t^2}} dt$          | avec $u = \frac{t}{2} - 1$ ..... | <input type="text"/> |
| d) | $\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^2} dt$              | avec $t = \tan u$ .....          | <input type="text"/> |
| e) | $\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{t\sqrt{t^2-1}} dt$ | avec $u = \frac{1}{t}$ .....     | <input type="text"/> |
| f) | $\int_e^{e^2} \frac{\ln t}{t + t \ln^2 t} dt$  | avec $u = \ln t$ .....           | <input type="text"/> |

## Changements de variable et intégrations par parties

### Calcul 13.3



Effectuer le changement de variable indiqué, continuer avec une intégration par parties et en déduire la valeur de l'intégrale.

a)  $\int_1^4 e^{\sqrt{t}} dt$  avec  $u = \sqrt{t}$  .....

b)  $\int_3^4 \frac{\ln(\sqrt{t}-1)}{\sqrt{t}} dt$  avec  $u = \sqrt{t}$  .....

## Calculs de primitives par changement de variable

### Calcul 13.4



Déterminer une primitive de  $f$  en utilisant le changement de variable donné.

a)  $x \in ]0, \frac{\pi}{2}[ \mapsto \frac{\cos x + \sin x}{\sin x \cos^2 x}$  avec  $u = \tan x$  .....

b)  $x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{1 + \text{th}(x)}$  avec  $u = e^x$  .....

c)  $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{\sqrt{e^x - 1}}$  avec  $u = \sqrt{e^x - 1}$  .....

d)  $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{x + \sqrt[3]{x}}$  avec  $u = \sqrt[3]{x}$  .....

e)  $x > 1 \mapsto \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$  avec  $u = \sqrt{x^2 - 1}$  .....

## Intégration des fractions rationnelles

### Prérequis

Fonctions ln et arctan. Division euclidienne entre polynômes.

Petites décompositions en éléments simples.

Forme canonique d'un trinôme du second degré.

Changements de variable affines dans les intégrales.

### Premier cas

#### Calcul 14.1



Calculer les intégrales suivantes.

a)  $\int_1^2 \frac{1}{t+1} dt \dots\dots\dots$

b)  $\int_1^2 \frac{1}{2t+1} dt \dots\dots\dots$

#### Calcul 14.2



Soit  $a \in \mathbb{R}_+^*$ . Calculer les intégrales suivantes.

a)  $\int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{16}} \frac{1}{\frac{t}{2} + \frac{1}{4}} dt \dots\dots\dots$

b)  $\int_0^{a^2} \frac{1}{t+a} dt \dots\dots\dots$

### Deuxième cas

#### Calcul 14.3



Calculer les intégrales suivantes, en effectuant d'abord une division euclidienne entre le numérateur et le dénominateur des fractions en jeu.

a)  $\int_1^2 \frac{1+t+t^2}{1+t} dt \dots\dots\dots$

b)  $\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{1+2t+3t^2}{4t+5} dt \dots\dots\dots$

### Troisième cas

Dans ce troisième cas, il s'agit de reconnaître une expression du type  $\frac{u'}{u}$ .

#### Calcul 14.4



Calculer les intégrales suivantes.

a)  $\int_1^2 \frac{2t+1}{t^2+t+1} dt \dots\dots\dots$

b)  $\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{t}{\frac{t^2}{2} + \frac{1}{3}} dt \dots\dots\dots$

#### Calcul 14.5



Soit  $a \in \mathbb{R}_+^*$ . Calculer les intégrales suivantes.

a)  $\int_1^{\sqrt{2}} \frac{t + \frac{1}{\sqrt{2}}}{t^2 + \sqrt{2}} dt \dots\dots\dots$

b)  $\int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^1 \frac{t}{at^2+1} dt \dots\dots\dots$

## Systèmes linéaires

### Prérequis

Résolution par substitution d'une variable, par combinaisons linéaires de lignes.

### Systèmes de 2 équations à 2 inconnues

#### Calcul 15.1



Résoudre dans  $\mathbb{R}^2$ .

a) $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 3x + 4y = 13 \end{cases}$ ..... <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/>	c) $\begin{cases} 3x - 6y = -3 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$ ..... <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/>
b) $\begin{cases} 2x + y = 16 \\ x - y = 5 \end{cases}$ ..... <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/>	d) $\begin{cases} 3x - 4y = -\sqrt{2} \\ 6x + 2y = 3\sqrt{2} \end{cases}$ ..... <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/>

#### Calcul 15.2 — Systèmes avec paramètre.



Résoudre dans  $\mathbb{R}^2$  en fonction des valeurs du paramètre  $a \in \mathbb{R}$ .

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ 2x + 4y = a \end{cases}$ ..... <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/>	c) $\begin{cases} 3x + 5y = a \\ 2x - y = a^2 \end{cases}$ ..... <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/>
b) $\begin{cases} x - ay = 3a + 2 \\ ax + y = 2a - 3 \end{cases}$ ..... <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/>	d) $\begin{cases} x + 2y = 3a \\ 2x + 3y = 5a - a^2 \end{cases}$ ..... <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/>

### Systèmes de 2 équations à 3 inconnues

#### Calcul 15.3



Résoudre dans  $\mathbb{R}^3$ .

a) $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 3x + y - 2z = 3 \end{cases}$ ..... <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/>	c) $\begin{cases} x - y + 3z = 5/2 \\ x + 2y - z = 3/2 \end{cases}$ ..... <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/>
b) $\begin{cases} 3x - 2y + z = 6 \\ x + 2y - z = -2 \end{cases}$ ..... <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/>	d) $\begin{cases} 5x + y + 2z = -5/2 \\ 2x - y + 2z = -5/3 \end{cases}$ ..... <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/>

### Systèmes de 3 équations à 3 inconnues

#### Calcul 15.4



Résoudre dans  $\mathbb{R}^3$ .

a) $\begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ 2x - y + z = 8 \\ 3x + y + 2z = 11 \end{cases}$ ..... <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/>	c) $\begin{cases} x + 3y + z = 1 \\ 2x - y + 2z = -1 \\ x + 10y + z = 0 \end{cases}$ ..... <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/>
b) $\begin{cases} a - b - c = -7 \\ 3a + 2b - c = 3 \\ 4a + b + 2c = 4 \end{cases}$ ..... <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/>	d) $\begin{cases} 3x + 2y + 3z = 0 \\ 2x - y + 2z = -1 \\ 4x + 5y + 4z = 1 \end{cases}$ ..... <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/>

**Calcul 15.5**



On considère le système d'inconnues  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  et de paramètre  $a \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + 2y + az = 2 \\ 2x + ay + 2z = 3. \end{cases}$$

Résoudre ce système pour les valeurs de  $a$  proposées.

a)  $a = 0$  .....

c)  $a = 3$  .....

b)  $a = -2$  .....

d)  $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 3\}$ . .....

**Calcul 15.6**



On considère le système d'inconnues  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  et de paramètres  $(a, c) \in \mathbb{R}^2$  :

$$\begin{cases} x - az = c \\ ax - y = c \\ ay - z = c. \end{cases}$$

Résoudre ce système pour les valeurs de  $a$  et  $c$  proposées.

a)  $a = 2, c = 7$  .....

c)  $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$  .....

b)  $a = 1, c = 2$  .....

**Calcul 15.7**



On propose le système d'inconnues  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  et de paramètre  $\lambda \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{cases} 4x + y + z = \lambda x \\ x + 4y + z = \lambda y \\ x + y + 4z = \lambda z. \end{cases}$$

Résoudre ce système pour les valeurs de  $\lambda$  proposées.

a)  $\lambda = 1$  .....

c)  $\lambda = 6$  .....

b)  $\lambda = 3$  .....

## Sommes et produits

### Prérequis

Factorielle. Identités remarquables. Décomposition en éléments simples.  
Fonctions usuelles (racine carré, logarithme népérien).

Si  $q$  est un nombre réel et si  $(m, n) \in \mathbb{N}^{*2}$  et  $m \leq n$ , on a

$$\begin{aligned} \bullet \sum_{k=m}^n k &= \frac{(n-m+1)(m+n)}{2} & \bullet \sum_{k=1}^n k^3 &= \left( \sum_{k=1}^n k \right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\ \bullet \sum_{k=1}^n k^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} & \bullet \sum_{k=m}^n q^k &= \begin{cases} q^m \frac{1-q^{n-m+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n-m+1 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Dans toute la suite,  $n$  désigne un entier naturel non nul.

## Calculs de sommes simples

### Calcul 18.1



Calculer les sommes suivantes.

a)  $\sum_{k=1}^{n+2} n$  .....

c)  $\sum_{k=1}^n (3k + n - 1)$  .....

b)  $\sum_{k=2}^{n+2} 7k$  .....

d)  $\sum_{k=2}^{n-1} \left( \frac{k-4}{3} \right)$  .....

### Calcul 18.2



Même exercice.

a)  $\sum_{k=1}^n k(k+1)$  .....

d)  $\sum_{k=0}^n 2^k 5^{n-k}$  .....

b)  $\sum_{k=0}^n (4k(k^2+2))$  .....

e)  $\sum_{k=1}^n (7^k + 4k - n + 2)$  .....

c)  $\sum_{k=2}^{n-1} 3^k$  .....

f)  $\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2}$  .....

### Calcul 18.3 — Produits.



Calculer les produits suivants, où  $p$  et  $q$  sont des entiers naturels non nuls tel que  $p \geq q$ .

a)  $\prod_{k=p}^q 2$  .....

c)  $\prod_{k=1}^n 5\sqrt{k} \times k$  .....

b)  $\prod_{k=1}^n 3^k$  .....

d)  $\prod_{k=-10}^{10} k$  .....

## Changements d'indice

### Calcul 18.4



Calculer les sommes suivantes en effectuant le changement d'indice demandé.

- a)  $\sum_{k=1}^n n+1-k$  avec  $j = n+1-k$ . .....
- b)  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k}$  avec  $j = n+1-k$ . .....
- c)  $\sum_{k=1}^n k2^k$  avec  $j = k-1$ . .....
- d)  $\sum_{k=3}^{n+2} (k-2)^3$  avec  $j = k-2$ . .....

## Sommes télescopiques, produits télescopiques

### Calcul 18.5 — Sommes télescopiques.



Calculer les sommes suivantes.

- a)  $\sum_{k=2}^{n+2} (k+1)^3 - k^3$  .....
- b)  $\sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$  .....
- c)  $\sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!}$  .....
- d)  $\sum_{k=1}^n k \times k!$  .....

### Calcul 18.6 — Produits télescopiques.



Calculer les produits suivants.

- a)  $\prod_{k=1}^n \frac{k+1}{k}$  .....
- b)  $\prod_{k=1}^n \frac{2k+1}{2k-1}$  .....
- c)  $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right)$  .....
- d)  $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$  .....

## Décomposition en éléments simples

### Calcul 18.7



Calculer les sommes suivantes.

- a)  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$  .....
- b)  $\sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+2)(k+3)}$  .....



## Sommation par paquets

### Calcul 18.8



Calculer les sommes suivantes.

a)  $\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k^2$  .....

b)  $\sum_{k=0}^{2n} \min(k, n)$  .....

## Sommes doubles

### Calcul 18.9



Calculer les sommes doubles suivantes.

a)  $\sum_{1 \leq i, j \leq n} j$  .....

b)  $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j}$  .....

c)  $\sum_{1 \leq i < j \leq n} (i + j)$  .....

d)  $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (i + j)^2$  .....

e)  $\sum_{1 \leq i, j \leq n} \ln(i^j)$  .....

f)  $\sum_{1 \leq i, j \leq n} \max(i, j)$  .....

## Coefficients binomiaux

### Prérequis

Factorielles. Coefficients binomiaux. Formule du binôme de Newton.

La lettre  $n$  désigne un entier naturel non nul.

## Manipulations de factorielles et coefficients binomiaux

### Calcul 19.1 — Pour s'échauffer.



Donner la valeur des expressions suivantes :

a) $\frac{101!}{99!}$ ..... <input style="width: 80px; height: 25px;" type="text"/>	d) $\binom{6}{2}$ ..... <input style="width: 80px; height: 25px;" type="text"/>
b) $\frac{10!}{7!}$ ..... <input style="width: 80px; height: 25px;" type="text"/>	e) $\binom{8}{3}$ ..... <input style="width: 80px; height: 25px;" type="text"/>
c) $\frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}$ ..... <input style="width: 80px; height: 25px;" type="text"/>	f) $4 \times \binom{7}{4}$ ..... <input style="width: 80px; height: 25px;" type="text"/>

### Calcul 19.2 — Pour s'échauffer - bis.



Écrire les expressions suivantes à l'aide de factorielles, coefficients binomiaux et le cas échéant à l'aide de puissances.

a) $6 \times 7 \times 8 \times 9$ ..... <input style="width: 150px; height: 35px;" type="text"/>	c) $2 \times 4 \times \dots \times (2n)$ ..... <input style="width: 150px; height: 35px;" type="text"/>
b) $\frac{6 \times 7 \times 8 \times 9}{2 \times 3 \times 4}$ ..... <input style="width: 150px; height: 35px;" type="text"/>	d) $3 \times 5 \times \dots \times (2n+1)$ ... <input style="width: 150px; height: 35px;" type="text"/>

### Calcul 19.3 — Avec des paramètres.



Simplifier les expressions ci-dessous. La lettre  $k$  désigne un entier naturel tel que  $k < n$ .

a) $\binom{n}{2}$ (pour $n \geq 2$ ) ..... <input style="width: 150px; height: 35px;" type="text"/>	d) $\frac{(n+2)!}{n!}$ ..... <input style="width: 150px; height: 35px;" type="text"/>
b) $\binom{n}{3}$ (pour $n \geq 3$ ) ..... <input style="width: 150px; height: 35px;" type="text"/>	e) $\frac{1}{n!} - \frac{n}{(n+1)!}$ ..... <input style="width: 150px; height: 35px;" type="text"/>
c) $\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+1}}$ ..... <input style="width: 150px; height: 35px;" type="text"/>	f) $\frac{(n+1)!}{2^{2(n+1)}} - \frac{n!}{2^{2n}}$ ..... <input style="width: 150px; height: 35px;" type="text"/>

### Calcul 19.4 — Avec des paramètres - bis.



Simplifier les expressions ci-dessous. La lettre  $a$  désigne un nombre non nul.

a) $\frac{1}{n!} + \frac{1}{2n \times (n+1)!} + \frac{1}{2 \times (n+2)!}$ ..... <input style="width: 250px; height: 35px;" type="text"/>
b) $\frac{(3(n+1))!}{a^{3(n+1)} \times ((n+1)!)^3} \div \frac{(3n)!}{a^{3n} \times (n!)^3}$ ..... <input style="width: 250px; height: 35px;" type="text"/>

## Autour du binôme de Newton

### Calcul 19.5 — Le binôme de Newton.



Calculer les sommes ci-dessous à l'aide de la formule du binôme de Newton.

- |  |   |
|--|---|
| a) $\sum_{k=0}^n 2^k \binom{n}{k}$ ..... <input style="width: 150px; height: 25px;" type="text"/>        | c) $\sum_{k=0}^n 2^{2n-k} \binom{n}{k}$ ..... <input style="width: 150px; height: 25px;" type="text"/>                  |
| b) $\sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k}$ ..... <input style="width: 150px; height: 25px;" type="text"/> | d) $\sum_{k=0}^n 2^{k+2} \binom{n}{k} \times 3^{2n-k+1}$ ..... <input style="width: 150px; height: 25px;" type="text"/> |

### Calcul 19.6



- a) Développer à l'aide de la formule du binôme de Newton  $(1 + 1)^n + (1 - 1)^n$  .....
- b) Calculer  $\sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2p}$  .....

### Calcul 19.7



En utilisant la fonction  $x \mapsto (1 + x)^n$ , ses dérivées d'ordre 1 et 2 et sa primitive s'annulant en 0, calculer

- |  |  |
|--|--|
| a) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ ..... <input style="width: 150px; height: 25px;" type="text"/>          | c) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \times k^2$ ..... <input style="width: 150px; height: 25px;" type="text"/>           |
| b) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \times k$ ..... <input style="width: 150px; height: 25px;" type="text"/> | d) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \times \frac{1}{k+1}$ ..... <input style="width: 150px; height: 25px;" type="text"/> |

### Calcul 19.8



- a) Donner le coefficient de  $x^n$  dans le développement de  $(1 + x)^{2n}$  .....
- b) Donner-en une autre expression en développant le produit  $(1 + x)^n(1 + x)^n$  .....
- c) Calculer  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$  .....

**Prérequis**

Suites récurrentes. Suites arithmétiques. Suites géométriques.

**Calcul de termes**

**Calcul 21.1 — Suite explicite.**



Soit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{2n+3}{5} \times 2^{n+2}$ . Calculer :

- |                |                      |                    |                      |
|----------------|----------------------|--------------------|----------------------|
| a) $u_0$ ..... | <input type="text"/> | c) $u_{n+1}$ ..... | <input type="text"/> |
| b) $u_1$ ..... | <input type="text"/> | d) $u_{3n}$ .....  | <input type="text"/> |

**Calcul 21.2 — Suite récurrente.**



On définit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par  $u_0 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n + 3$ . Calculer :

- |                              |                      |                |                      |
|------------------------------|----------------------|----------------|----------------------|
| a) son troisième terme ..... | <input type="text"/> | b) $u_3$ ..... | <input type="text"/> |
|------------------------------|----------------------|----------------|----------------------|

**Calcul 21.3 — Suite récurrente.**



On définit la suite  $(v_n)_{n \geq 1}$  par  $v_1 = \sqrt{2}$  et  $\forall n \geq 1, v_{n+1} = \sqrt{v_n}$ . Calculer :

- |                |                      |                            |                      |
|----------------|----------------------|----------------------------|----------------------|
| a) $v_3$ ..... | <input type="text"/> | b) son sixième terme ..... | <input type="text"/> |
|----------------|----------------------|----------------------------|----------------------|

**Calcul 21.4 — Suite récurrente.**



On définit la suite  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par  $w_0 = 2$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n^2$ . Calculer :

- |                |                      |                             |                      |
|----------------|----------------------|-----------------------------|----------------------|
| a) $w_2$ ..... | <input type="text"/> | b) son centième terme ..... | <input type="text"/> |
|----------------|----------------------|-----------------------------|----------------------|

**Calcul 21.5 — Suite explicite.**



Soit la suite  $(t_n)_{n \geq 1}$  définie par  $\forall n \in \mathbb{N}, t_n = \ln\left(\frac{n^n}{2^n}\right)$ . Calculer, pour  $n \in \mathbb{N}^*$  :

- |                   |                      |                   |                      |
|-------------------|----------------------|-------------------|----------------------|
| a) $t_{2n}$ ..... | <input type="text"/> | b) $t_{4n}$ ..... | <input type="text"/> |
|-------------------|----------------------|-------------------|----------------------|

**Suites arithmétiques et géométriques**

**Calcul 21.6 — Suite arithmétique.**



La suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est la suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 2. Calculer :

- |   |                      |  |                      |
|---|----------------------|--|----------------------|
| a) $a_{10}$ .....                               | <input type="text"/> | c) $a_{1\ 000}$ .....                            | <input type="text"/> |
| b) $s_{100} = a_0 + a_1 + \dots + a_{99}$ ..... | <input type="text"/> | d) $s_{101} = a_0 + a_1 + \dots + a_{100}$ ..... | <input type="text"/> |

**Calcul 21.7 — Suite arithmétique.**



La suite  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite arithmétique de raison  $r$  vérifiant que  $b_{101} = \frac{2}{3}$  et  $b_{103} = \frac{3}{4}$ . Calculer :

- a)  $b_{102}$  .....       b)  $r$  .....

**Calcul 21.8 — Suite géométrique.**



La suite  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est la suite géométrique de premier terme  $g_0 = 3$  et de raison  $\frac{1}{2}$ . Calculer :

- a) Son dixième terme est : .....       c)  $g_{10}$  .....   
b)  $\sigma_{10} = g_0 + g_1 + \dots + g_9$  .....       d)  $\sigma_{11} = g_0 + g_1 + \dots + g_{10}$  .....

**Calcul 21.9 — Suite géométrique.**



La suite  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique de raison  $q$  vérifiant que  $h_{11} = \frac{5\pi}{11}$  et  $h_{13} = \frac{11\pi}{25}$ . Calculer :

- a)  $h_{12}$  .....       b)  $q$  .....

## Suites récurrentes sur deux rangs

**Calcul 21.10**



Soit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par que  $u_0 = 2$ ,  $u_1 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n$ . Calculer :

- a)  $u_n$  .....       b)  $u_5$  .....

**Calcul 21.11**



Soit la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par que  $v_0 = 0$ ,  $v_1 = \sqrt{2}$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $v_{n+2} = 2v_{n+1} + v_n$ . Calculer :

- a)  $v_n$  .....       b)  $v_2$  .....

**Calcul 21.12 — Suite de Fermat.**



Soit la suite  $(F_n)_{n \geq 0}$  définie par  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $F_n = 2^{2^n} + 1$ . Calculer :

- a)  $F_3$  .....       d)  $F_n \times (F_n - 2)$  .....   
b)  $F_4$  .....       e)  $F_n^2$  .....   
c)  $(F_{n-1} - 1)^2 + 1$  .....       f)  $F_{n+1}^2 - 2(F_n - 1)^2$  .....

## Calcul matriciel

### Prérequis

Calculs algébriques (sommes), coefficients binomiaux.

## Calcul matriciel

### Calcul 26.1 — Calculs de produits matriciels.



Dans cet exercice, on note  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$  les cinq matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = (1 \quad 7 \quad -2),$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Calculer les produits matriciels suivants.

a)  $A^2 \dots$

d)  $E \times B$

g)  $D^2 \dots$

b)  $A^3 \dots$

e)  $A \times E$

h)  $D \times C$

c)  $B \times E$

f)  $B \times A$

i)  $B^T \times B$

**Calcul 26.2 — Calcul de puissances.**



On note

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & (1) & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

la matrice  $D$  étant de taille  $n \times n$  (où  $n \in \mathbb{N}^*$ ), et où  $\theta \in \mathbb{R}$ .

Calculer le carré, le cube de chacune de ces matrices et utiliser ces calculs pour conjecturer leur puissance  $k$ -ième, pour  $k \in \mathbb{N}$ .

a) $A^2 \dots$	e) $B^3 \dots$	i) $C^k \dots$
b) $A^3 \dots$	f) $B^k \dots$	j) $D^2 \dots$
c) $A^k \dots$	g) $C^2 \dots$	k) $D^3 \dots$
d) $B^2 \dots$	h) $C^3 \dots$	l) $D^k \dots$

**Calcul 26.3 — Calculs avec des sommes.**



Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On note  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ ,  $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  et  $C = (c_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  les matrices de termes généraux suivants :

$$a_{ij} = \binom{i-1}{j-1}, \quad b_{ij} = 2^i 3^{j-i}, \quad c_{ij} = \delta_{i, j+1} + \delta_{i, j-1}.$$

Donner le coefficient d'indice  $(i, j)$  des matrices suivantes. On simplifiera au maximum le résultat obtenu et, notamment, on trouvera une expression sans le symbole  $\sum$ .

a) $A \times B \dots\dots\dots$	c) $B^T \times B \dots\dots\dots$
b) $B^2 \dots\dots\dots$	d) $A \times C \dots\dots\dots$

**Calcul 26.4 — Deux calculs plus difficiles !.**



Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ .

En utilisant les matrices de l'exercice précédent, calculer les termes généraux suivants.

a)  $[A^2]_{i,j}$  .....       b)  $[C^2]_{i,j}$  .....

## Inversion de matrices

**Calcul 26.5 — Détermination d'inversibilité, calcul d'inverses.**



Dans cet exercice, on note les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} \pi & e \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1+i & 2-i \\ i & -i \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} \pi & \pi & 2\pi \\ \pi & 0 & 0 \\ -\pi & -2\pi & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 7 & 2 & 2 & 9 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer, si elle existe, l'inverse de chacune des matrices. Si elle n'est pas inversible, indiquer dans la case « non inversible » .

a) $A \dots$	d) $D \dots$	g) $G \dots$
b) $B \dots$	e) $E \dots$	h) $H \dots$
c) $C \dots$	f) $F \dots$	i) $J \dots$



**Calcul 26.6 — Matrices dépendant d'un paramètre.**



On note  $\lambda$  et  $\mu$  deux paramètres réels. On note  $A$  et  $B$  les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ \lambda & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & \lambda - 1 \\ 1 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

Pour chaque matrice, donner une condition nécessaire et suffisante (abrégée ci-dessous en CNS) sur  $\lambda$  pour que la matrice soit inversible et en donner, dans ce cas, l'inverse.

a) CNS pour  $A$   
inversible ...

c) CNS pour  $B$   
inversible ...

b) Inverse de  $A$  ...

d) Inverse de  $B$  ...

# Algèbre linéaire

## Prérequis

Coordonnées, Applications linéaires, Matrices, Rang.

## Vecteurs

### Calcul 27.1



Pour chacun des calculs suivants, déterminer les coordonnées du vecteur  $u$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

- a)  $u = (1, 1)$ ,  $\mathcal{B} = ((0, 1), (-1, 2))$ . .....
- b)  $u = (1, 1)$ ,  $\mathcal{B} = ((-1, 2), (0, 1))$ . .....
- c)  $u = (3, 4)$ ,  $\mathcal{B} = ((1, 2), (12, 13))$ . .....
- d)  $u = (1, 2, 1)$ ,  $\mathcal{B} = ((0, 1, 3), (4, 5, 6), (-1, 0, 1))$ . .....
- e)  $u = (-1, 0, 1)$ ,  $\mathcal{B} = ((1, 0, 1), (1, 1, 1), (-1, -1, 3))$ . .....
- f)  $u = X^3 + X^2$ ,  $\mathcal{B} = (1, X, X(X - 1), X(X - 1)(X - 2))$  .....
- g)  $u : x \mapsto \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ ,  $\mathcal{B} = (x \mapsto \cos(x), x \mapsto \sin(x))$  .....

## Calculs de rangs

### Calcul 27.2 — Sans calcul.



Déterminer le rang des matrices suivantes :

- a)  $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$  .....
- b)  $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 4 \\ 2 & 8 & 2 & 8 \\ 2 & 8 & 2 & 8 \\ 5 & 20 & 5 & 20 \end{pmatrix}$  .....
- c)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$  .....
- d)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 9 \\ 6 & 7 & 13 \end{pmatrix}$  .....
- e)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$  .....
- f)  $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  .....

**Calcul 27.3**



Déterminer le rang des matrices suivantes :

a)  $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & -3 & -1 \\ -4 & -2 & -2 \end{pmatrix}$  .....

c)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  .....

b)  $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  .....

d)  $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  .....

## Matrices et Applications linéaires

**Calcul 27.4 — Matrices d'endomorphismes.**



Pour les applications linéaires  $f$  et les bases  $\mathcal{B}$  suivantes, déterminer la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

a)  $f : (x, y) \mapsto (x + y, 3x - 5y), \mathcal{B} = ((1, 0), (0, 1)).$  .....

b)  $f : (x, y) \mapsto (x + y, 3x - 5y), \mathcal{B} = ((0, 1), (1, 0)).$  .....

c)  $f : (x, y) \mapsto (2x + y, x - y), \mathcal{B} = ((1, 2), (3, 4)).$  .....

d)  $f : (x, y, z) \mapsto (x + y, 3x - z, y), \mathcal{B} = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 1)).$  .....

e)  $f : P \mapsto P(X + 2), \mathcal{B} = (1, X, X^2)$  .....

Calcul 27.5 — Matrices d'applications linéaires.



Pour les applications linéaires  $f$  et les bases  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$  suivantes, déterminer la matrice de  $f$  de la base  $\mathcal{B}$  dans la base  $\mathcal{B}'$ .

a)  $f : (x, y, z) \mapsto (x + y + z, x - y), \mathcal{B} = ((0, 1, 3), (4, 5, 6), (-1, 0, 1)), \mathcal{B}' = ((0, 1), (1, 0)).$

b)  $f : P \mapsto P', \mathcal{B} = (1, X, X^2), \mathcal{B}' = (1, X, X^2, X^3). \dots\dots\dots$

## Équations différentielles

## Prérequis

Équations différentielles.

## Équations d'ordre 1 à coefficients constants

## Calcul 28.1



Déterminer les solutions des problèmes de Cauchy suivants :

a)  $y' = 12y$  et  $y(0) = 56$  .....

b)  $y' = y + 1$  et  $y(0) = 5$  .....

c)  $y' = 3y + 5$  et  $y(0) = 1$  .....

d)  $y' = 2y + 12$  et  $y(0) = 3$  .....

## Calcul 28.2



Déterminer les solutions des problèmes de Cauchy suivants :

a)  $5y' = -y$  et  $y(1) = e$  .....

b)  $7y' + 2y = 2$  et  $y(7) = -1$  .....

c)  $y' - \sqrt{5}y = 6$  et  $y(0) = \pi$  .....

d)  $y' = \pi y + 2e$  et  $y(\pi) = 12$  .....

## Équations d'ordre 2, homogènes, à coefficients constants

### Calcul 28.3 — Une équation avec conditions initiales.



Déterminer les solutions des problèmes de Cauchy suivants :

a)  $y'' - 3y' + 2y = 0$  et  $y(0) = 1$  et  $y'(0) = 2$  .....

b)  $y'' - 3y' + 2y = 0$  et  $y(0) = 1$  et  $y'(0) = 1$  .....

c)  $y'' - 3y' + 2y = 0$  et  $y(0) = 1$  et  $y'(0) = 3$  .....

d)  $y'' - 3y' + 2y = 0$  et  $y(0) = 1$  et  $y'(0) = 3i$  .....

### Calcul 28.4 — Racines doubles, Racines simples.



Déterminer les solutions des problèmes de Cauchy suivants :

a)  $y'' - y = 0$  et  $y(0) = 1$  et  $y'(0) = 1$  .....

b)  $y'' + 3y' + 2y = 0$  et  $y(0) = 2$  et  $y'(0) = 3$  .....

c)  $y'' + y' - 2y = 0$  et  $y(0) = 1$  et  $y'(0) = 2$  .....

d)  $y'' - 2y' + y = 0$  et  $y(0) = 2$  et  $y'(0) = 1$  .....

e)  $y'' + 4y' + 4y = 0$  et  $y(1) = 1$  et  $y'(1) = -3$  .....

### Calcul 28.5 — Racines complexes.



Déterminer les solutions des problèmes de Cauchy suivants :

a)  $y'' + y = 0$  et  $y(0) = 1$  et  $y'(0) = 2$  .....

b)  $y'' + y' + y = 0$  et  $y(0) = 1$  et  $y'(0) = -1$  .....

c)  $y'' + 2y' + 2y = 0$  et  $y(0) = 0$  et  $y'(0) = 1$  .....

d)  $y'' - 2y' + 5y = 0$  et  $y(0) = i$  et  $y'(0) = -i$  .....

## Séries numériques

## Prérequis

Séries usuelles (convergence et sommes), décomposition en éléments simples.

## Séries géométriques, exponentielles, de Riemann

Dans les calculs de cette section, reconnaître chacune des séries suivantes, dire si elle converge, et le cas échéant calculer sa somme.

## Calcul 29.1 — Séries géométriques.



a)  $\sum_{k \geq 0} 2^k$  .....

c)  $\sum_{k \geq 0} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k$  .....

b)  $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{2^k}$  .....

d)  $\sum_{k \geq 10} \frac{1}{3^k}$  .....

## Calcul 29.2 — Séries exponentielles.



a)  $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!}$  .....

c)  $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{2^k \times k!}$  .....

b)  $\sum_{k \geq 2} \frac{2^k}{k!}$  .....

## Calcul 29.3 — Séries de Riemann.



a)  $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2}$  .....

d)  $\sum_{k \geq 3} \frac{i^k}{7^{k-1}}$  .....

b)  $\sum_{k \geq 3} \frac{1}{\sqrt{k}}$  .....

e)  $\sum_{k \geq 4} \frac{1}{(1 - i\sqrt{2})^k}$  .....

c)  $\sum_{k \geq 6} \frac{1}{k}$  .....

## Séries télescopiques

## Calcul 29.4



Prouver la convergence et calculer la somme de chacune des séries suivantes :

a)  $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2 + k}$  .....

c)  $\sum_{k \geq 2} \ln\left(\frac{k^2}{k^2 - 1}\right)$  .....

b)  $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^3 + 3k^2 + 2k}$  .....

d)  $\sum_{k \geq 0} \arctan\left(\frac{(k+2) - (k+1)}{1 + (k+2)(k+1)}\right)$  .....

# Séries géométriques dérivées

## Prérequis

On pourra utiliser le fait que si  $\alpha \in ]-1, 1[$ , les séries

$$\sum_{k \geq 1} k\alpha^{k-1} \quad \text{et} \quad \sum_{k \geq 2} k(k-1)\alpha^{k-2},$$

appelées *séries géométriques dérivées*, convergent et ont pour somme

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k\alpha^{k-1} = \frac{1}{(1-\alpha)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\alpha^{k-2} = \frac{1}{(1-\alpha)^3}.$$

### Calcul 29.5 — Séries géométriques dérivées.



Reconnaitre chacune des séries suivantes, dire si elle converge, et le cas échéant calculer sa somme.

- a)  $\sum_{k \geq 2} \frac{1}{2^{2k}}$  .....
- b)  $\sum_{k \geq 1} e^{-(k-1)}$  .....
- c)  $\sum_{k \geq 1} k2^k$  .....
- d)  $\sum_{k \geq 0} k \frac{1}{2^{k-1}}$  .....

### Calcul 29.6 — Séries géométriques dérivées – bis.



Reconnaitre chacune des séries suivantes, dire si elle converge, et le cas échéant calculer sa somme.

- a)  $\sum_{k \geq 1} k2^{-k}$  .....
- b)  $\sum_{k \geq 1} (3k+1) \frac{1}{3^k}$  .....
- c)  $\sum_{k \geq 1} k(k-1) \frac{1}{2^{k-2}}$  .....
- d)  $\sum_{k \geq 2} k(k-1)e^{-(k-2)}$  .....