Corrigé *total sur 66 points*

Exercice 1 - vrai ou faux *5 points - 0,5 point par question*

Indiquer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.

Pour cet exercice (seulement), vous n'avez pas besoin de justifier. Les mauvaises réponses ne sont pas pénalisées.

a) $\forall x \in \mathbb{R}^*, \ln(|x|) \geqslant 0$

Faux, par exemple $\ln\left(\left|\frac{1}{2}\right|\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$ ce qui est strictement négatif.

b) $x^2 = y^2 \Rightarrow x = y$

Faux, par exemple $(-2)^2 = 2^2$ alors que $2 \neq -2$

c) si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{3n}{4} u_n$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique

Faux, puisqu'avec cette définition, $u_1 = 0 \times u_0$ et $u_2 = \frac{3}{4} \times u_1$

d) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{a_k}{b_k} = \frac{\prod_{k=1}^{n} a_k}{\prod_{k=1}^{n} b_k}$

Vrai, cf. cours.

e) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{k+1} = \sum_{i=1}^{n} e^i$

Vrai, on s'en convainc avec le changement d'inidce $i = k+1 \Leftrightarrow i-1 = k$ et donc $k = 0 \Rightarrow i = 1$ et $k = n-1 \Rightarrow i = n$

f) $\displaystyle\sum_{k=5}^{23} 6 = 108$

Faux, il suffit de compter le nombre de 6 dans la somme, il y en a 19 donc $\displaystyle\sum_{k=5}^{23} 6 = 19 \times 6 = 114$

g) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (a_k - a_{k+1}) = a_{n+1} - a_0$

Faux, il s'agit bien d'une somme télescopique, mais dans ce cas, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (a_k - a_{k+1}) = a_0 - a_{n+1}$

h) la fonction $x \mapsto \ln(x^3)$ est impaire

Faux, elle n'est même pas définie sur un intervalle symétrique par rapport à 0

i) $\forall x \in \mathbb{R}_+, \lfloor\sqrt{x}\rfloor = \sqrt{\lfloor x \rfloor}$

Faux, on peut tester avec 2, d'un côté $\lfloor\sqrt{2}\rfloor = 1$ car $1 \leqslant \sqrt{2} < 2$ et de l'autre $\sqrt{\lfloor 2 \rfloor} = \sqrt{2}$

j) $\binom{2023}{46} = \binom{2023}{1977}$ Vrai car $\forall p \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant p \leqslant n, \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$

Exercice 2 - suites à expliciter *5 points*

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = 3u_n + 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

a. Exprimer u_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$ *1,5 points*

On reconnait une suite arithmético-géométrique, on cherche dans un premier temps un point fixe :
$\alpha = 3\alpha + 4 \Leftrightarrow 2\alpha = -4 \Leftrightarrow \alpha = -2$
on introduit alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = u_n - (-2) = u_n + 2$
soit $n \in \mathbb{N}$, par définition $v_{n+1} = u_{n+1} + 2$
donc par définition de $u_n, v_{n+1} = 3u_n + 4 + 2 = 3u_n + 6 = 3(u_n + 2) = 3v_n$
donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison 3
donc $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 3^n v_0$, or $v_0 = u_0 + 2$ et $u_0 = -1$ donc $v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 1 \times 3^n = 3^n$
or $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = v_n - 2$ donc $u_n = 3^n - 2$

b. Calculer $\sum_{k=0}^{n} u_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ *1,5 points*

D'après la formule trouvée à la question précédente, $\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} (3^k - 2) = \sum_{k=0}^{n} 3^k - \sum_{k=0}^{n} 2$ par linéarité

or d'après les résultats sur les sommes géométriques, $\sum_{k=0}^{n} 3^k = \frac{1-3^{n+1}}{1-3} = \frac{1-3^{n+1}}{-2} = \frac{3^{n+1}-1}{2}$

par ailleurs $\sum_{k=0}^{n} 2 = (n+1) \times 2$

donc $\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{3^{n+1}-1}{2} - 2(n+1) = \frac{3^{n+1}}{2} - 2n - \frac{5}{2}$

2. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $u_0 = 2, u_1 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$
Donner une expression explicite de u_n *2 points*

On reconnait une suite récurrente linéaire d'ordre 2, on étudie donc l'équation caractéristique : $x^2 - 5x + 6 = 0$
$x^2 - 5x + 6$ admet pour racines (évidentes) 2 et 3 donc par propriété du cours, on sait qu'il existe deux réels λ et μ tels que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda 2^n + \mu 3^n$
or $u_0 = 2$ donc $\lambda 2^0 + \mu 3^0 = 2$ i.e. $\lambda + \mu = 2$ et $u_1 = 5$ donc $\lambda 2^1 + \mu 3^1 = 5$ i.e. $2\lambda + 3\mu = 5$
en faisant la différence $L_2 - 2L_1$ on trouve $2\lambda + 3\mu - 2(\lambda + \mu) = 5 - 4$ i.e. $\mu = 1$
or $\lambda + \mu = 2$ donc $\lambda = 2 - \mu = 1$ et finalement $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1 \times 2^n + 1 \times 3^n = 2^n + 3^n$

Exercice 3 - formule de la somme des carrés d'entiers *9 points*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

1. Exprimer $\sum_{k=1}^{n} (k+1)^3$ en fonction de $\sum_{k=1}^{n} k^3$, à l'aide d'un changement d'indice. *2 points*

On applique le changement d'indice $j = k + 1 \Leftrightarrow k = j - 1$

alors $k = 1 \Rightarrow j = 2$ et $k = n \Rightarrow j = n + 1$ et donc $\sum_{k=1}^{n} (k+1)^3 = \sum_{j=2}^{n+1} j^3$

or d'après la relation de Chasles $\sum_{j=1}^{n+1} j^3 = 1^3 + \sum_{j=2}^{n+1} j^3$ d'une part et $\sum_{j=1}^{n+1} j^3 = \sum_{j=1}^{n} j^3 + (n+1)^3$ d'autre part

donc $\sum_{j=2}^{n+1} j^3 = \sum_{j=1}^{n} j^3 + (n+1)^3 - 1$ et donc $\sum_{k=1}^{n} (k+1)^3 = \sum_{j=1}^{n} j^3 + (n+1)^3 - 1$

2. Développer $(k+1)^3$. Exprimer alors $\sum_{k=1}^{n} (k+1)^3$ en fonction de $\sum_{k=1}^{n} k^3$ et de $\sum_{k=1}^{n} k^2$ *2 points*

Sans le binôme de Newton :
$(k+1)^3 = (k+1)^2(k+1) = (k^2 + 2k + 1)(k+1) = k^3 + 2k^2 + k + k^2 + 2k + 1 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$
donc $\sum_{k=1}^{n} (k+1)^3 = \sum_{k=1}^{n} (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) = \sum_{k=1}^{n} k^3 + 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$ par linéarité
donc $\sum_{k=1}^{n} (k+1)^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3 \times \frac{n(n+1)}{2} + n$

3. En égalant les expressions obtenues en **1** et **2**, déduire la formule $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ *2 points*

D'après **1.** $\sum_{k=1}^{n} (k+1)^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 - 1$ et d'après **2.** $\sum_{k=1}^{n} (k+1)^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3 \times \frac{n(n+1)}{2} + n$

donc $\sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 - 1 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3 \times \frac{n(n+1)}{2} + n$

donc $(n+1)^3 - 1 = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3 \times \frac{n(n+1)}{2} + n$

donc $3\sum_{k=1}^{n} k^2 = (n+1)^3 - 1 - 3 \times \frac{n(n+1)}{2} - n = (n+1)^3 - 1 - \frac{3n(n+1)}{2} - n$

$$= n^3+3n^2+3n+1-1-\frac{3n^2+3n}{2}-n = n^3+3n^2+3n-\frac{3n^2+3n}{2}-n$$
$$= \frac{2n^3+6n^2+6n-3n^2-3n-2n}{2} = \frac{2n^3+3n^2+n}{2} = \frac{n(2n^2+3n+1)}{2}$$

or $(n+1)(2n+1) = 2n^2+n+2n+1 = 2n^2+3n+1$

donc $3\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$ et donc $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

4. Redémontrer la formule précédente par récurrence. *2 points*

On s'exécute, pour $n\in\mathbb{N}^*$, on définit $P(n)$: $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Initialisation : $P(1)$ est vraie $\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{1} k^2 = \frac{1(1+1)(2\times 1+1)}{6} \Leftrightarrow 1^2 = \frac{1\times 2\times 3}{6} \Leftrightarrow 1 = \frac{6}{6}$ ce qui est vrai, donc $P(1)$ est vraie

Hérédité : soit $n\in\mathbb{N}^*$, supposons que $P(n)$ est vraie

alors par hypothèse, $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

par ailleurs $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2$ d'après la relation de Chasles

donc $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = (n+1)\left[\frac{n(2n+1)}{6}+n+1\right] = (n+1)\frac{2n^2+n+6(n+1)}{6}$

$$= (n+1)\frac{2n^2+n+6n+6}{6} = (n+1)\frac{2n^2+7n+6}{6}$$

or $(n+2)\left[2(n+1)+1\right] = (n+2)(2n+3) = 2n^2+3n+4n+6 = 2n^2+7n+6$

donc $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = (n+1)\frac{(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)(n+1+1)\left[2(n+1)+1\right]}{6}$ i.e. $P(n+1)$ est vraie d'où l'hérédité

donc par théorème de récurrence, $\forall n\in\mathbb{N}^*, P(n)$ est vraie et la formule est donc démontrée (à nouveau).

5. Avec Python, définir une fonction qui prend en entrée un entier naturel n et qui renvoie la valeur de $\sum_{k=1}^{n} k^2$

On utilise la syntaxe synthétique permettant de définir la liste des carrés d'entier (attention au $n+1$ dans le `range`, dont on fait la somme pour obtenir le résultat attendu. *1 point*

```
def somme_carres(n):
    return sum([n**2 for n in range(1,n+1)]
```

Exercice 4 *12 points*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de nombres réels défnie par $u_0 = 2$ et la relation de récurrence $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{3u_n-1}{u_n+1}$

1. Soit f définie par $f(x) = \frac{3x-1}{x+1}$

a. Déterminer $\mathscr{D}_f$ l'ensemble de définition de f *0,5 point*

f est définie dès lors que $x+1\neq 0$ i.e. $x\neq -1$ donc $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$

b. Etudier les variations de f *1 point*

f est dérivable sur $\mathscr{D}_f$ et f est de la forme $f = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = 3x-1$ et $v(x) = x+1$

donc $u'(x) = 3$ et $v'(x) = 1$ et $\forall x\in\mathscr{D}_f, f'(x) = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$

donc $f'(x) = \frac{3(x+1)-(3x-1)\times 1}{(x+1)^2} = \frac{3x+3-3x+1}{(x+1)^2} = \frac{4}{(x+1)^2}$

donc $\forall x\in\mathscr{D}_f, f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]-\infty,-1[$ et sur $]-1,+\infty[$

c. En déduire que, pour tout $x\geqslant 1, f(x)\geqslant 1$ *0,5 point*

Par définition, $f(1) = \dfrac{3\times 1 - 1}{1+1} = 1$ et f est strictement croissante sur $]-1,+\infty[$
donc $\forall x \geqslant 1, f(x) \geqslant f(1)$ i.e. $f(x) \geqslant 1$

d. Etudier le signe de $f(x) - x$ *1,5 points*

Soit $x \in \mathscr{D}_f$ alors $f(x) - x = \dfrac{3x-1}{x+1} - x = \dfrac{3x-1-x(x+1)}{x+1} = \dfrac{3x-1-x^2-x}{x+1} = \dfrac{-x^2+2x-1}{x+1}$
or $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ donc $f(x) - x = -\dfrac{(x-1)^2}{x+1}$
donc $\forall x \neq 1, (x-1)^2 > 0$ et de fait $f(x) - x$ est du signe opposé de celui de $x+1$
donc $f(x) - x > 0$ sur $]-\infty,-1[$ et $f(x) - x < 0$ sur $]-1,1[$ et sur $]1,+\infty[$ (et $f(1) - 1 = 0$)

2. Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n$ existe et $u_n \geqslant 1$ *1,5 points*

Par récurrence évidemment, pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $P(n)$: u_n existe et $u_n \geqslant 1$

Initialisation : u_0 existe et $u_0 = 2$ donc $u_0 \geqslant 1$ donc $P(0)$ est vraie

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $P(n)$ est vraie
alors par hypothèse, $u_n \geqslant 1$ donc $u_n + 1 \neq 0$ et donc u_{n+1} existe
par ailleurs, comme démontré au **1.c.** $x \geqslant 1 \Rightarrow f(x) \geqslant 1$
par hypothèse à nouveau, $u_n \geqslant 1$ donc $f(u_n) \geqslant 1$ soit $u_{n+1} \geqslant 1$, i.e. $P(n+1)$ est vraie d'où l'hérédité
donc par théorème de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ est vraie, i.e. u_n existe et $u_n \geqslant 1$

3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. *1 point*

D'après **1.d.** $x \geqslant 1 \Rightarrow f(x) - x \leqslant 0$ i.e. $f(x) \leqslant x$
et d'après **2.** $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant 1$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, f(u_n) \leqslant u_n$ i.e $u_{n+1} \leqslant u_n$
et donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

4. Avec Python,

a) écrire un programme qui définit la fonction f *1 point*

On utilise la syntaxe pour la définition de fonction.

```
def f(x):
  return (3x-1)/(x+1)
```

b) écrire un programme qui représente la fonction f et la droite $y = x$ sur l'intervalle $[1; 10]$ *1,5 points*

On importe `matplotlib.pyplot` pour la représentation et `numpy` pour `linspace`, puis à partir de la même liste d'abscisses, on créée la liste des ordonnées de la fonction f que l'on représente avec la droite.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
x=np.linspace(1,10,100)
y=f(x)
plt.plot(x,y)
plt.plot(x,x) # pour la droite y=x
plt.show()
```

c) écrire un programme qui calcule et représente les 100 premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *2 points*

On calcule les termes de la suite de manière récursive et on les inclut progressivement dans une liste qu'on représente ensuite.

```
L=[2] #la liste ne contient que le premier terme initialement
u=2 # on définit le premier terme
for n in range(1,100):
  u=f(u) #on calcule le nouveau terme en fonction du précédent
  L.append(u) # on le rajoute dans la liste

plt.plot(L, '+') # par défaut, Python prend les abscisses 0, 1, ..., 99, ce qui nous
    convient ici
plt.show()
```

d) on admet que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1, déterminer le rang du premier terme de la suite tel que $|u_n - 1| \leqslant 10^{-3}$ *1,5 points*

On calcule les termes de la suite de manière récursive mais cette fois jusqu'à atteindre la condition demandée, donc on calcule tant que $|u_n - 1| > 10^{-3}$, sachant que $|u_n - 1| = u_n - 1$ car $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant 1$

```
u=2 # on définit le premier terme
n=0 # pour suivre le rang des termes
while u-1>10**(-3):
  u=f(u) #comme plus haut
  n=n+1 # on met à jour le rang
print(n) # on affiche le résultat à l'issue de la boucle
```

Exercice 5 *8 points*

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\ln(1-x^2)}{x^2+1}$

1. Déterminer $\mathscr{D}_f$, l'ensemble de définition de f et justifier que f est également dérivable sur $\mathscr{D}_f$ *1,25 points*

Le quotient et le logarithme peuvent limiter la bonne définition de f, mais le dénominateur est toujours strictement positif donc f est définie dès lors que $\ln(1-x^2)$ est défini, et donc dès que $1-x^2 > 0$
or $1-x^2 = (1-x)(1+x)$ est un polynôme du second degré, avec $a < 0$, et dont les racines sont -1 et 1
donc $1-x^2$ est strictement positif entre les racines (strictement), i.e. sur $]-1;1[$
donc f est définie sur $]-1;1[$ et elle est également dérivable sur cet intervalle en tant que composée et quotient de fonctions dérivables sur cet intervalle (rien ne limite la dérivabilité de ces fonctions).

2. Etudier la parité de la fonction f *0,75 point*

$\mathscr{D}_f =]-1;1[$ est symétrique par rapport à 0 et $\forall x \in \mathscr{D}_f, f(-x) = \dfrac{\ln(1-(-x)^2)}{1+(-x)^2} = \dfrac{\ln(1-x^2)}{1+x^2} = f(x)$
donc f est une fonction paire.

3. Justifer que, pour tout $x \in \mathscr{D}_f, f'(x) = \dfrac{-2xg(x)}{(x^2+1)^2(1-x^2)}$ avec $g(x) = x^2+1+(1-x^2)\ln(1-x^2)$ *2 points*

f s'écrit $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = \ln(1-x^2)$ et $v(x) = 1+x^2$, de fait $v'(x) = 2x$

u s'écrit elle-même $u(x) = \ln(w(x))$ avec $w(x) = 1-x^2$ et de fait $w'(x) = -2x$, donc $u'(x) = \dfrac{w'(x)}{w(x)} = -\dfrac{2x}{1-x^2}$

on peut alors déterminer $f' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$: $\forall x \in \mathscr{D}_f, f'(x) = \dfrac{-\frac{2x}{1-x^2}\times(1+x^2) - \ln(1-x^2)\times(2x)}{(1+x^2)^2}$

donc $f'(x) = \dfrac{-\frac{2x\times(1+x^2)}{1-x^2} - \frac{\ln(1-x^2)\times(2x)\times(1-x^2)}{1-x^2}}{(1+x^2)^2} = \dfrac{\frac{-2x\times(1+x^2)-2x\times(1-x^2)\ln(1-x^2)}{1-x^2}}{(1+x^2)^2} = \dfrac{\frac{-2x\times\left[1+x^2+(1-x^2)\ln(1-x^2)\right]}{1-x^2}}{(1+x^2)^2}$

$= \dfrac{-2x\times\left[1+x^2+(1-x^2)\ln(1-x^2)\right]}{1-x^2}\times\dfrac{1}{(1+x^2)^2} = \dfrac{-2x\times\left[1+x^2+(1-x^2)\ln(1-x^2)\right]}{(1-x^2)(1+x^2)}$

$= \dfrac{-2xg(x)}{(1-x^2)(1+x^2)}$ avec $g(x) = 1+x^2+(1-x^2)\ln(1-x^2)$

4. **a.** Déterminer le signe de $g'(x)$ pour $x \in \mathscr{D}_f$ *2 points*

On peut écrire $g(x) = 1+x^2+h(x)u(x)$ où $h(x) = 1-x^2$ donc $h'(x) = -2x$ et $u(x)$ est définie plus haut
donc $\forall x \in \mathscr{D}_f, g'(x) = 2x+h'(x)u(x)+h(x)u'(x) = 2x-2x\ln(1-x^2)+(1-x^2)\times\dfrac{(-2x)}{1-x^2}$
donc $g'(x) = 2x-2x\ln(1-x^2)-2x = -2x\ln(1-x^2)$
or $\forall x \in \mathscr{D}_f, x^2 \geqslant 0 \Rightarrow 1-x^2 \leqslant 1$ et donc par croissance de $\ln, \ln(1-x^2) \leqslant \ln(1)$ i.e. $\ln(1-x^2) \leqslant 0$
donc $-\ln(1-x^2) \geqslant 0$ et donc $g'(x)$ est du signe de $2x$ i.e. du signe de x
donc $g'(x)$ est négatif (ou nul) sur $]-1,0]$ et positif (ou nul) sur $[0,1[$

b. Dresser alors le tableau de variation de g sur $\mathscr{D}_f$ *0,5 point*

D'après la question précédente et sachant que $g(0) = 0^2+1+(1-0^2)\ln(1-0^2) = 1+\ln(1) = 1$, on peut immédiatement donner le tableau ci-contre :

x	-1		0		1
$g'(x)$	‖	-	0	+	‖
g	‖	↘	1	↗	‖

c. En déduire le signe de $g(x)$ pour $x \in \mathscr{D}_f$ *0,5 point*

De manière immédiate encore, on déduit de l'étude des variations que g admet un minimum en 0, or ce minimum vaut 1 donc $\forall x \in \mathscr{D}_f, g(x) \geqslant 1$ et donc $g(x) > 0$

5. Dresser alors le tableau de variation de f sur $\mathscr{D}_f$ *1 point*

A nouveau, il s'agit principalement de recueillir les fruits des questions précécentes dans le tableau suivant. Sachant que les termes $g(x)$, $(x^2+1)^2$ et $(1-x^2)$ sont strictement positifs sur $\mathscr{D}_f$, $f'(x)$ est du signe de $-2x$ et enfin $f(0) = \dfrac{\ln(1-0^2)}{0^2+1} = \dfrac{\ln(1)}{1} = 0$:

x	-1		0		1
$-2x$		+	0	-	
$f'(x)$	‖	+	0	-	‖
f	‖	↗	0	↘	‖

Exercice 6 *12 points*

On considère les fonctions ch et sh définies sur $\mathbb{R}$ par : $\text{ch}(x) = e^x + e^{-x}$ et $\text{sh}(x) = e^x - e^{-x}$
ainsi que la fonction f définie sur par : $f(x) = \dfrac{x}{\text{sh}(x)}$

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $\text{sh}(x) = 0$ *1 point*

   $\text{sh}(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^x = e^{-x} \Leftrightarrow \ln(e^x) = \ln(e^{-x})$ car $\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$
   donc $\text{sh}(x) = 0 \Leftrightarrow x = -x \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

2. Etudier la parité des fonctions ch et sh. Interpréter graphiquement. *1,5 points*

   Les fonctions ch et sh sont définies sur $\mathbb{R}$ qui est symétrique par rapport à 0
   soit $x \in \mathbb{R}$, alors $\text{ch}(-x) = e^{-x} + e^{-(-x)} = e^{-x} + e^x = e^x + e^{-x} = \text{ch}(x)$ donc la fonction ch est paire, de fait sa courbe représentative sera symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
   par ailleurs $\text{sh}(-x) = e^{-x} - e^{-(-x)} = e^{-x} - e^x = -(e^x - e^{-x}) = -\text{sh}(x)$ donc la fonction sh est impaire, de fait sa courbe représentative sera symétrique par rapport à l'origine du repère.

3. Dresser le tableau de variations de la fonction sh, puis en déduire son signe. *1,5 points*

   La fonction sh est dérivable sur $\mathbb{R}$ (c'est la somme de deux fonctions exponentielles)
   et $\forall x \in \mathbb{R}, \text{sh}'(x) = e^x - (-e^{-x})$ car la dérivée de e^u est $u'e^u$ (ici pour e^{-x} avec $u(x) = x$ et $u'(x) = -1$)
   donc $\forall x \in \mathbb{R}, \text{sh}'(x) = e^x + e^{-x}$ (on remarque au passage que $\text{sh}'(x) = \text{ch}(x)$)
   or $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$ et $e^{-x} > 0$ donc $\text{sh}'(x) > 0$
   donc la fonction sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$,
   de plus $\text{sh}(0) = 0$ d'où le tableau :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g	↗	0	↗

   donc $x < 0 \Rightarrow f(x) < f(0)$ i.e. $f(x) < 0$ et de même $x > 0 \Rightarrow f(x) > 0$

4. Etudier les variations de la fonction ch *1,25 points*

   De manière analogue, $\forall x \in \mathbb{R}, \text{ch}'(x) = e^x + (-e^{-x}) = e^x - e^{-x}$
   on remarque $\text{ch}'(x) = \text{sh}(x)$ de fait $\text{ch}'(x) \leqslant 0$ sur $\mathbb{R}_-$ et $\text{ch}'(x) \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}_+$
   donc ch est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$ (on pourrait montrer que c'est même « strictement »)

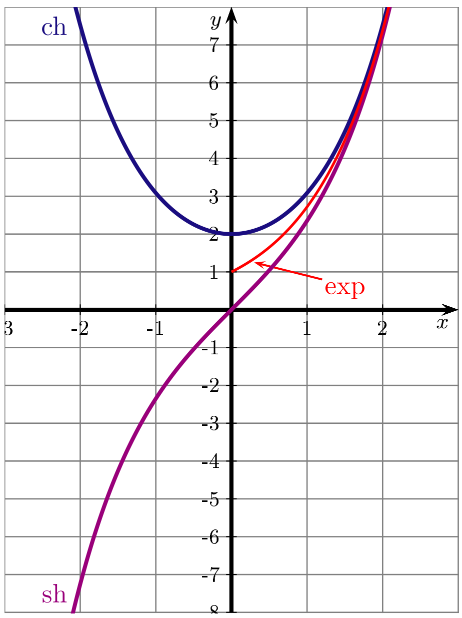
   Option B (si on ne remarque pas $\text{ch}' = \text{sh}$) :
   alors $\text{ch}'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow e^x - e^{-x} \geqslant 0 \Leftrightarrow e^x \geqslant e^{-x} \Leftrightarrow \ln(e^x) \geqslant \ln(e^{-x}) \Leftrightarrow x \geqslant -x \Leftrightarrow 2x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 0$
   l'équivalence est conservée en composant avec la fonction ln car les fonctions ln et exp (pour le retour) sont croissantes. De même $\text{ch}'(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 0$ (on peut aussi utiliser la parité) ... d'où les variations.
   On peut enfin préciser que ch atteint un minimum en 0 qui vaut $\text{ch}(0) = e^0 + e^{-0} = 2$

5. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \text{ch}(x) > \text{sh}(x)$ *0,75 point*

   Soit $x \in \mathbb{R}$ alors $e^{-x} > 0$ et $0 > -e^{-x}$ donc $e^{-x} > -e^{-x}$ donc $e^x + e^{-x} > e^x - e^{-x}$ i.e. $\text{ch}(x) > \text{sh}(x)$

6. Donner sur un même graphique l'allure des courbes représentatives des fonctions ch et sh *1,5 points*

   On peut remarquer dans un premier temps que pour $x \geqslant 0, e^{-x}$ devient rapidement négligeable devant e^x. En effet $e \simeq 2,7$ donc $e^3 \geqslant 10$ et de fait $e^{-3} = \dfrac{1}{e^3} \leqslant \dfrac{1}{10}$ et donc $e^3 + e^{-3}$ est proche de e^3 (à $\dfrac{1}{10}$ près)
   donc les courbes de sh et ch sont rapidement proches de la courbe de l'exponentielle quand x croit (ch étant au-dessus et sh en-dessous)
   de plus $\text{ch}(0) = 2$ et $\text{sh}(0) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \text{ch}(x) > e^x > \text{sh}(x)$ et enfin on utilise la parité pour représenter les fonctions :



7. Déterminer $\mathscr{D}_f$, l'ensemble de définition de f *0,5 point*

   f est définie dès que son dénominateur est non nul, i.e. $\text{sh}(x) \neq 0$
   or d'après **1.** $\text{sh}(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ donc $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}^*$

8. Etudier la parité de la fonction f *0,75 point*

   $\mathscr{D}_f$ est symétrique par rapport à 0
   et pour $x \in \mathscr{D}_f, f(-x) = \dfrac{-x}{\text{sh}(-x)} = \dfrac{-x}{-\text{sh}(x)}$ car sh est impaire (cf. **2.**)
   donc $f(-x) = \dfrac{x}{\text{sh}(x)} = f(x)$ donc f est paire

9. Calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathscr{D}_f$ *0,75 point*

Soit $x \in \mathscr{D}_f$, alors en utilisant la formule du quotient, on trouve : $f'(x) = \dfrac{1 \times \operatorname{sh}(x) - x\operatorname{sh}'(x)}{(\operatorname{sh}(x))^2}$

or d'après **3.** $\operatorname{sh}'(x) = \operatorname{ch}(x)$ donc $f'(x) = \dfrac{\operatorname{sh}(x) - x\operatorname{ch}(x)}{(\operatorname{sh}(x))^2}$

10. On pose : $\forall x \in \mathbb{R}_+, h(x) = \operatorname{sh}(x) - x\operatorname{ch}(x)$. Etudier les variations de h, puis en déduire le signe de h *1,5 points*

$\forall x \in \mathbb{R}_+, h'(x) = \operatorname{sh}'(x) - (\operatorname{ch}(x) + x\operatorname{ch}'(x)) = \operatorname{ch}(x) - \operatorname{ch}(x) - x\operatorname{sh}(x)$ car $\operatorname{sh}' = \operatorname{ch}$ et $\operatorname{ch}' = \operatorname{sh}$ d'après **3.** et **4.**
donc $h'(x) = -x\operatorname{sh}(x)$ donc $h'(x) \leqslant 0$ (car $x \geqslant 0$ et $\operatorname{sh}(x) \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}_+$ d'après **3.**)
donc h est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, de plus $h(0) = \operatorname{sh}(0) - 0 \times \operatorname{ch}(0) = 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}_+, h(x) \leqslant 0$

11. En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$, puis établir le tableau de variations de f sur $\mathscr{D}_f$ *1 point*

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, comme $f'(x) = \dfrac{h(x)}{(\operatorname{sh}(x))^2}$
et $h(x) \leqslant 0$, on en déduit que $f'(x) \leqslant 0$
donc f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et par parité, on en déduit que f est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$
on en déduit donc le tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		$\nearrow$	$\Vert$	$\searrow$	

Exercice 7 *6 points*

On définit les suites de réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + \dfrac{1}{2}v_n \\ v_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + \dfrac{1}{2}v_n \end{cases}$ et $u_0 = 1$ et $v_0 = 1$

1. Montrer que, pour tout entier naturel n : $u_n + v_n = 2$ *1,5 points*

On va le montrer par récurrence, pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n) : u_n + v_n = 2$

Initialisation : $u_0 + v_0 = 1 + 1 = 2$ donc $P(0)$ est vraie

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $P(n)$ est vraie
par définition des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$:
$u_{n+1} + v_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + \dfrac{1}{2}v_n + \dfrac{1}{3}u_n + \dfrac{1}{2}v_n = \left(\dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3}\right)u_n + \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\right)v_n = u_n + v_n$
or par hypothèse de récurrence $u_n + v_n = 2$
donc $u_{n+1} + v_{n+1} = 2$, i.e. $P(n+1)$ est vraie, d'où l'hérédité
donc par théorème de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ est vraie, i.e. $u_n + v_n = 2$

2. On définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = v_n - \dfrac{4}{5}$

a. Utiliser la question **1.** pour montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique. *1,5 points*
En déduire x_n en fonction de n

Soit $n \in \mathbb{N}$, par définition $x_{n+1} = v_{n+1} - \dfrac{4}{5}$

or $v_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + \dfrac{1}{2}v_n$ donc $x_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + \dfrac{1}{2}v_n - \dfrac{4}{5}$

or $u_n + v_n = 2$ donc $u_n = 2 - v_n$ et donc $x_{n+1} = \dfrac{1}{3}(2 - v_n) + \dfrac{1}{2}v_n - \dfrac{4}{5}$

donc $x_{n+1} = \left(-\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2}\right)v_n + \dfrac{2}{3} - \dfrac{4}{5} = \dfrac{1}{6}v_n + \dfrac{10}{15} - \dfrac{12}{15} = \dfrac{1}{6}v_n - \dfrac{2}{15}$

donc $x_{n+1} = \dfrac{1}{6}\left(v_n - \dfrac{12}{15}\right) = \dfrac{1}{6}\left(v_n - \dfrac{4}{5}\right) = \dfrac{1}{6}x_n$ car $x_n = v_n - \dfrac{4}{5}$

donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{6}$, donc $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = \left(\dfrac{1}{6}\right)^n x_0$

or $x_0 = v_0 - \dfrac{4}{5} = 1 - \dfrac{4}{5} = \dfrac{1}{5}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = \dfrac{1}{5} \times \dfrac{1}{6^n}$

b. Déterminer alors v_n en fonction de n, puis montrer que $u_n = \dfrac{1}{5}\left(6 - \dfrac{1}{6^n}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ *1 point*

Soit $n \in \mathbb{N}$, alors $v_n = x_n + \dfrac{4}{5}$ donc d'après **2.a.** $v_n = \dfrac{4}{5} + \dfrac{1}{5} \times \dfrac{1}{6^n}$

or d'après **1.**, $u_n + v_n = 2$ donc $u_n = 2 - v_n$ et donc $u_n = 2 - \left(\dfrac{4}{5} + \dfrac{1}{5} \times \dfrac{1}{6^n}\right) = 2 - \dfrac{4}{5} - \dfrac{1}{5} \times \dfrac{1}{6^n} = \dfrac{6}{5} - \dfrac{1}{5} \times \dfrac{1}{6^n}$

finalement $u_n = \dfrac{1}{5}\left(6 - \dfrac{1}{6^n}\right)$ et ce $\forall n \in \mathbb{N}$

c. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{40} u_k$ *2 points*

D'après la question précédente, $\displaystyle\sum_{k=0}^{40} u_k = \sum_{k=0}^{40} \frac{1}{5}\left(6 - \frac{1}{6^k}\right) = \frac{1}{5}\sum_{k=0}^{40}\left(6 - \frac{1}{6^k}\right) = \frac{1}{5}\left(\sum_{k=0}^{40} 6 - \sum_{k=0}^{40}\frac{1}{6^k}\right)$ par linéarité

or $\displaystyle\sum_{k=0}^{40} 6 = 41 \times 6 = 246$ et par propriété sur les sommes géométriques $\displaystyle\sum_{k=0}^{40} \frac{1}{6^k} = \frac{1-\left(\frac{1}{6}\right)^{41}}{1-\frac{1}{6}} = \frac{1-\frac{1}{6^{41}}}{\frac{5}{6}}$

donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{40} u_k = \frac{1}{5}\left[246 - \frac{6}{5}\left(1 - \frac{1}{6^{41}}\right)\right] = \frac{1}{25}\left(1230 - 6 + \frac{1}{6^{40}}\right) = \frac{1}{25}\left(1224 + \frac{1}{6^{40}}\right)$

Exercice 8 - numéros de téléphone *9 points*

On s'intéresse aux numéros de téléphone à 10 chiffres commençant par 06

1. Combien en existe-t-il au total ? *1 point*

Il y 8 chiffres à choisir, ce qui revient aussi à choisir un nombre entre 0 et 99 999 999, donc il y a cent millions de choix. On peut aussi le voir comme 8 tirages avec remise, où chaque tirage comporte 10 choix, donc 10^8 choix au total.

2. Combien ne comportent que des chiffres différents (après le 06) ? *2 points*

Désormais, c'est comme si on effectue des tirages sans remise, il y a donc 10 choix pour le premier chiffre, puis 9 choix pour le deuxième, ..., puis 3 choix pour le dernier. Donc au total $10 \times 9 \times 8 \times \cdots \times 3 = \displaystyle\prod_{k=0}^{7}(10-k)$

on peut effectuer le calcul : $\displaystyle\prod_{k=0}^{7}(10-k) = 1\,814\,400$

Option B : on peut aussi considérer que l'on choisit 8 chiffres, puis que pour chacun de ces choix, il y a 8! permutations, donc $\displaystyle\binom{10}{8} \times 8!$ numéros dans ce cas.

3. Combien contiennent exactement 3 fois le chiffre 6 (après le 06) ? *1,5 points*

Il faut placer 3 fois le chiffre 6, il faut donc choisir les positions où les placer, il y en a $\displaystyle\binom{8}{3}$ puis pour chacun de ces choix de positions, on peut placer n'importe quel autre chiffre parmi les 9 restants, ce qui correspond à 5 tirages avec remise comportant chacun 9 choix, soit 9^5 choix

donc dans ce cas, on a $\displaystyle\binom{8}{3} \times 9^5 = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 9^5}{3!} = 8 \times 7 \times 9^5 = 3\,306\,744$ choix

4. Combien contiennent 8 chiffres rangés dans l'ordre (après le 06) ? *2 points*

L'énoncé est un peu ambigü, on suppose qu'il s'agit de chiffres différentes et qu'il s'agit d'ordre croissant (si on prend aussi l'ordre décroissant, il suffit de multiplier par deux, par contre si on peut utiliser plusieurs fois le même chiffre, c'est plus compliqué).

On a en fait que 3 choix pour le premier chiffre qui peut être 0, 1 ou 2

si on commence par le 3, le reste est totalement déterminé : 23456789

par contre si on on commence par le 0 ou le 1, il peut y avoir plusieurs possibilités par exemple 12345678 ou 12456789

Pour dénombrer, le plus simple est de considérer que l'on choisit 8 chiffres parmi 10, et une fois ces 8 chiffres choisis, l'ordre est totalement déterminé. Ou peut-être de manière encore plus simple, choisir les deux chiffres qui ne vont pas apparaitre.

Finalement il y a $\displaystyle\binom{10}{2} = \binom{10}{8} = \frac{10 \times 9}{2} = 45$ numéros de téléphone dans ce cas.

5. Combien ne contiennent que des chiffres pairs (après le 06) ? *1 point*

Il s'agit simplement d'un tirage avec remise pour chacun des chiffres, donc 8 tirages avec à chaque fois 5 possibilités pour avoir un chiffre pair $(0, 2, 4, 6, 8)$ donc $5^8 = 625 * 625 = 390\,625$ numéros de téléphone dans ce cas

6. Combien ne contiennent que des chiffres identiques (après le 06) ? *0,5 point*

Il y a tout simplement 10 possibilités pour le premier chiffre qui détermine tout le numéro ensuite, donc 10 numéros dans ce cas.