Cas pratiques

Exercice 1 - amidakujis

Combien existe-t-il d'amidakujis à 5 lignes verticales ? à n lignes ?

Exercice 2 - anagrammes

Combien existe-t-il d'anagrammes de « MAISON », de « CANAPE », de « MISSISSIPI » et d'« ABRACADABRA » ?

Exercice 3 - dominos

Quel est nombre de pièces dans un jeu de dominos (classique) ?

Exercice 4 - loto

Combien existe-t-il de grilles de loto (ancienne ou nouvelle version) ?

Exercice 5 - bonjour

Dans un groupe de n personnes, tout le monde se serre la main tous les matins. Quel est donc le nombre de poignées de mains quotidiennes ?

Exercice 6 - médaille en chocolat

4 athlètes participent à une finale olympique, combien de classements sont possibles pour cette finale ? Quel est le nombre de possibilités si la situation d'ex-æquo peut se produire ?

Exercice 7 - joyeux anniversaire (difficile)

Dans un groupe de n personnes (par exemple 48), quelle est la probabilité que deux personnes aient la même date de naissance ?

Exercice 8 - jouons aux cartes

On tire 5 cartes dans un jeu de 32 cartes.
Combien de tirages vérifient les conditions suivantes ?

a) aucune condition supplémentaire

b) il y a au moins un pique parmi les 5 cartes

c) il y a (exactement) deux valets

d) il y a un as et deux carreaux

e) il n'y a pas de carte en-dessous de 9

f) les cinq cartes forment deux paires (exactement)

g) les cinq cartes sont de la même couleur

h) les cinq cartes forment une quinte flush (suite de même couleur)

Exercice 9 - mot de passe

Le lycée met en place un nouveau système de sécurité informatique. Initialement les élèves disposent d'un mot de passe à 8 chiffres et le lycée envisage deux nouveaux types de mot de passe :
- 4 lettres distinctes puis 4 chiffres distincts.
- 2 lettres (potentiellement identiques) puis 6 chiffres (idem).

Quel type de mot de passe offre le plus de possibilités ?

Un peu plus théorique

Exercice 10 - une extension de la formule de Pascal

Soit E l'ensemble à 12 éléments $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l\}$.

1. A l'aide des coefficients binomiaux, dénombrer les parties de E à 5 éléments qui contiennent

a. a et b ; **b.** a mais pas b ; **c.** b mais pas a ; **d.** ni a, ni b.

2. En déduire la relation $\binom{12}{5} = \binom{10}{3} + 2\binom{10}{4} + \binom{10}{5}$

3. Généraliser le résultat obtenu en prouvant, par un dénombrement, que pour $2 \leqslant p \leqslant n$, on a $\binom{n}{p} = \binom{n-2}{p-2} + 2\binom{n-2}{p-1} + \binom{n-2}{p}$

4. Retrouver le résultat précédent en appliquant la formule de Pascal.

Exercice 11 - une formule de chef

Soit $1 \leqslant p \leqslant n$. On considère n boules et deux boîtes A et B. Un échantillon est constitué d'une boule dans la boîte A et de $p-1$ boules dans la boîte B. En dénombrant de deux façons différentes ces échantillons, établir la formule $n\binom{n-1}{p-1} = p\binom{n}{p}$ puis la retrouver par le calcul.

Exercice 12 - dans un livre

Un livre comporte 14 chapitres.

1. Combien y-a-t-il de façons de choisir 3 chapitres dans ce livre (exprimer à l'aide des coefficients binomiaux) ?
2. Pour $k = 3, \ldots, 14$, dénombrer les choix de 3 chapitres pour lesquels k est le plus grand numéro des chapitres choisis.
3. En déduire que : $\binom{14}{3} = \binom{13}{2} + \binom{12}{2} + \cdots + \binom{3}{2} + \binom{2}{2}$
4. Généraliser les dénombrements précédents pour démontrer que, pour $1 \leqslant p \leqslant n$, on a : $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$

Exercice 13 - formule du cours

Avec p et n deux entiers naturels tels que $p \leqslant n$, démontrer par récurrence que $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

Exercice 14 - un peu de calcul

Montrer qu'avec les entiers naturels $0 \leqslant p \leqslant k \leqslant n$:
$\binom{n}{k}\binom{k}{p} = \binom{n}{p}\binom{n-p}{k-p}$

Exercice 15 - formule de Pascal généralisée - bis

Pour $1 \leqslant p \leqslant n$:

1. Montrer par récurrence que $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$
2. Retrouver cette formule à l'aide du triangle de Pascal.

Exercice 16 - coefficients binomiaux

A l'aide de la formule du binôme que vous n'avez pas vue, ou plutôt sans, trouver le coefficient de $x^2y^5z^3$ dans le développement de
$P(x, y, z) = (x + y + z)^{10}$

Exercice 17 - somme des coefficients binomiaux au carré

Soit n un entier non nul. On considère l'arbre modélisant la répétition de $2n$ épreuves aléatoires identiques d'un schéma de Bernoulli.

1. Dans cet arbre, quel est le nombre de chemins avec exactement n succès ?
2. **a.** Quel est le nombre de chemins permettant d'obtenir 0 succès lors des n premières épreuves, puis n succès lors des n dernières épreuves ?

   b. Dans cet arbre, que vaut le produit $\binom{n}{k} \times \binom{n}{n-k}$ pour k entier naturel compris entre 0 et n ?
3. Déduire des questions précédentes l'expression de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$ en fonction de n.

Exercice 18 - formule de Vandermonde

1. une urne contient 8 jetons : 3 rouges et 5 noirs.
   En calculant de 2 façons le nombre de tirages de 2 jetons, montrer que : $\binom{8}{2} = \displaystyle\sum_{i=0}^{2} \binom{3}{i}\binom{5}{2-i}$
2. Montrer de 2 manières que $\binom{n+p}{k} = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{p}{k-i}$ (avec $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ et $k \leqslant \min(n, p)$) :

   a) par une démonstration ensembliste.
   Indication : on pourra s'intéresser à deux ensembles respectivement de n et p éléments, constituant un ensemble à n+p éléments.

   b) il existe d'autres démonstrations, avez-vous une idée ?
3. En déduire que $\binom{2n}{n} = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2$