**Corrigé** *Total sur 28,5 points*

**Exercice 1** - échauffement *4 points*

Calculer les sommes suivantes :

a) $\sum_{i=-11}^{13}(4-7i) = \sum_{i=-11}^{13} 4 + \sum_{i=-11}^{13}(-7i) = \sum_{i=-11}^{13} 4 - 7\sum_{i=-11}^{13} i$ par linéarité (deux fois) *1,5 points*

or $\sum_{i=-11}^{13} 4 = (13-(-11)+1)\times 4 = 25\times 4 = 100$

par ailleurs $\sum_{i=-11}^{13} i = \sum_{i=-11}^{-1} i + \sum_{i=1}^{11} i + \sum_{i=12}^{13} i$ (par relation de Chasles et en enlevant le $i=0$)

donc $\sum_{i=-11}^{13} i = \sum_{i=12}^{13} i = 12+13 = 25$ car $\sum_{i=-11}^{-1} i = -\sum_{i=1}^{11} i$

finalement $\sum_{i=-11}^{13}(4-7i) = 100 - 7\times 25 = 100-175 = -75$

b) $\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{3^{2k}} = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)\times(-1)^k}{(3^2)^k} = -\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{9}\right)^k$ *1,5 points*

nous sommes alors ramenés à une somme géométrique :

$$\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{9}\right)^k = \frac{-\frac{1}{9}-\left(-\frac{1}{9}\right)^{n+1}}{1-\left(-\frac{1}{9}\right)} = \frac{-\frac{1}{9}-\left(-\frac{1}{9}\right)^{n+1}}{\frac{10}{9}} = \frac{9}{10}\left(-\frac{1}{9}-\left(-\frac{1}{9}\right)^{n+1}\right) = -\frac{1}{10}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{9^n}\right)$$

finalement $\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{3^{2k}} = \frac{1}{10}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{9^n}\right) = \frac{1}{10}\left(1-\frac{(-1)^n}{9^n}\right) = \frac{1}{10}\left(1-\left(-\frac{1}{9}\right)^n\right)$

c) $\sum_{k=1}^{n}\left(e^k - e^{k+1}\right)$ *1 point*

on reconnait une somme téléscopique et en posant $a_k = e^k$, on a alors $a_{k+1} = e^{k+1}$ et donc $\sum_{k=1}^{n}\left(e^k-e^{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k+1}) = a_1 - a_{n+1}$ d'après le cours, donc $\sum_{k=1}^{n}\left(e^k-e^{k+1}\right) = e - e^{n+1}$

**Exercice 2** *4 points*

Pour $n\in\mathbb{N}$, avec $n\geqslant 2$, on définit $P_n = \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right)$

**1.** Calculer $P_2, P_3, P_4$ et $P_5$ *1 point*

Par définition, $P_2 = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ $\quad P_3 = \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right) = P_2\times\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

de même $P_4 = P_3\times\left(1-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{3}\times\frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ et $P_5 = P_4\times\left(1-\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{4}\times\frac{4}{5} = \frac{1}{5}$

**2.** Avec Python, écrire une fonction qui prend en entrée un entier $n$ et renvoie $P_n$ *1,5 points*

Option 1 : en partant de $\frac{1}{2}$, on calcule tous les termes suivants du produit et on complète le produit au fur et à mesure.

```
def P(n):
    p=1/2
    for i in range(3,n+1):
        p=p*(1-1/i)
    return p
```

Option 2 : en remarquant que $P_n = P_{n-1} \times \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$, on définit la fonction de manière récursive (i.e. elle s'appelle elle-même). Attention, il est indispensable de mettre un « point d'arrêt » dans ce cas.

```
def P2(n):
    if n==2 :
        return 1/2
    else :
        return P2(n-1)*(1-1/n)
```

**3.** Pour $n \geqslant 2$, émettre une conjecture sur la valeur de $P_n$, puis la démontrer par récurrence.

Comme le laisse présager la question **1.**, $P_n = \dfrac{1}{n}$ *1,5 points*

pour $n \in \mathbb{N}$, et $n \geqslant 2$, on définit alors l'assertion $A(n)$ : $P_n = \dfrac{1}{n}$

Initialisation : pour $n = 2$ ici et $A(2)$ est vraie d'après **1.**

Hérédité : pour un entier $n, n \geqslant 2$, supposons $A(n)$ vraie

par définition $P_{n+1} = \displaystyle\prod_{k=2}^{n+1}\left(1 - \frac{1}{k}\right) = \left[\prod_{k=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{k}\right)\right] \times \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$ (par relation de Chasles)

or par hypothèse de récurrence :

$\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{k}\right) = P_n = \frac{1}{n}$ donc $P_{n+1} = \dfrac{1}{n}\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right) = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{n+1}{n+1} - \dfrac{1}{n+1}\right) = \dfrac{1}{n} \times \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$

i.e. $A(n+1)$ est vraie, donc par théorème de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, A(n)$ est vraie.

*Nota bene* : on peut également le démontrer avec un produit télescopique en écrivant $1 - \dfrac{1}{k} = \dfrac{k-1}{k}$

**Exercice 3** - suites à expliciter *4 points*

Donner les formules explicites des suites suivantes :

**1.** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = -5$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 4u_n + 3$ *1,5 points*

On reconnait une suite arithmético-géométrique, on va commencer par chercher le point fixe de la fonction affine associée ($f(x) = 4x + 3$) : $\alpha = 4\alpha + 3 \Leftrightarrow 3\alpha = -3 \Leftrightarrow \alpha = -1$
On définit ensuite la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $v_n = u_n - \alpha = u_n + 1$ et on montre qu'elle est géométrique.
En effet : $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = u_{n+1} + 1 = 4u_n + 3 + 1 = 4u_n + 4 = 4(u_n + 1) = 4v_n$
$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc géométrique de raison 4
de fait, $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = q^n v_0 = 4^n \times (-4) = -4^{n+1}$ et donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = v_n - 1 = -4^{n+1} - 1$

**2.** $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_0 = 0, v_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} = \dfrac{1}{2}(v_{n+1} + v_n)$ *2,5 points*

On reconnait une suite récurrente linéaire d'ordre 2 dont l'équation caractéristique est :
$x^2 - \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2} = 0$ dont 1 est une solution évidente et on en déduit que $-\dfrac{1}{2}$ est l'autre

de fait, $\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, v_n = \lambda\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n + \mu 1^n = \lambda\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n + \mu$

or $v_0 = 0$ et $v_1 = 1$ donc $\begin{cases} 0 = \lambda + \mu \\ 1 = \lambda\left(-\dfrac{1}{2}\right) + \mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = \lambda + \mu \\ 1 = -\lambda\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\dfrac{2}{3} \\ \mu = \dfrac{2}{3} \end{cases}$

donc $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = -\dfrac{2}{3} \times \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n + \dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{3}\left(1 - \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right)$

**Exercice 4** - suite et somme *7,5 points*

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n + n - 1$

**1.** a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant 1$ *1,5 points*

On peut étudier les premiers termes de la suite : $u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 5$, ce qui permet de deviner que la suite est croissante. Pour démontrer correctement la propriété, on peut le faire

par récurrence en définissant pour $n \in \mathbb{N}$, l'assertion $P(n) : u_n \geqslant 1$
Initialisation : $u_0 = 1$ donc $P(0)$ est vraie.
Hérédité : pour $n \in \mathbb{N}$, supposons $P(n)$ vraie
c'est-à-dire $u_n \geqslant 1$ et donc $2u_n \geqslant 2$ ; de plus $n \geqslant 0$ donc $n-1 \geqslant -1$
donc $2u_n + n - 1 \geqslant 2 - 1$, soit $u_{n+1} \geqslant 1$ ce qui signifie que $P(n+1)$ est vraie.
Donc par théorème de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ est vraie.

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant n$ *1 point*

Soit $n \in \mathbb{N}$, par définition, $u_{n+1} = 2u_n + n - 1$
or d'après 1.a) $u_n \geqslant 1$, donc $u_{n+1} \geqslant 2 \times 1 + n - 1$, c'est-à-dire $u_{n+1} \geqslant n + 1$
finalement $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geqslant n+1$, et ce $\forall n \in \mathbb{N}$, autrement dit $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geqslant n$
comme c'est également le cas pour $u_0 (\geqslant 0)$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant n$

**2.** Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n - n$ *1,5 points*

On ne change pas une équipe qui gagne ! Encore une récurrence.
De même on peut définir pour $n \in \mathbb{N}$, l'assertion $Q(n) : u_n = 2^n - n$
Initialisation : $u_0 = 1 = 2^0 - 0$ et donc $Q(0)$ est vraie.
Hérédité : pour $n \in \mathbb{N}$, supposons $Q(n)$ vraie
par définition, $u_{n+1} = 2u_n + n - 1$, donc avec l'hypothèse de récurrence $u_{n+1} = 2 \times (2^n - n) + n - 1$
soit $u_{n+1} = 2^{n+1} - 2n + n - 1 = 2^{n+1} - (n+1)$, ce qui valide $Q(n+1)$
donc par théorème de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, Q(n)$ est vraie.

**3.** Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{u_{n+1} - 1}{2^n} = \dfrac{u_n - 1}{2^{n-1}} + \dfrac{n}{2^n}$ *1,5 points*

Soit $n \in \mathbb{N}$, comme $2^n \neq 0$,
$\dfrac{u_{n+1} - 1}{2^n} = \dfrac{u_n - 1}{2^{n-1}} + \dfrac{n}{2^n} \Leftrightarrow 2^n \times \dfrac{u_{n+1} - 1}{2^n} = 2^n \times \left[\dfrac{u_n - 1}{2^{n-1}} + \dfrac{n}{2^n}\right] \Leftrightarrow u_{n+1} - 1 = 2(u_n - 1) + n$
ce qui équivaut à $u_{n+1} = 2u_n - 2 + 1 + n = 2u_n + n - 1$
cette dernière égalité étant vraie (c'est la définition de la suite), celle de départ l'est donc aussi.

**4.** En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+1}{2^{n-1}}$ *2 points*

D'après l'égalité précédente (valable pour tout $k \geqslant 0$), $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{2^k} = \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{u_{k+1} - 1}{2^k} - \frac{u_k - 1}{2^{k-1}}\right]$
On voit que la partie de droite est une somme télescopique, pour bien s'en convaincre, on pose
$a_k = \dfrac{u_k - 1}{2^{k-1}}$, on a alors $a_{k+1} = \dfrac{u_{k+1} - 1}{2^k}$
donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{u_{k+1} - 1}{2^k} - \frac{u_k - 1}{2^{k-1}}\right] = \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) = a_n - a_0 = \frac{u_n - 1}{2^{n-1}} - \frac{u_0 - 1}{2^{0-1}}$ par télescopage
or $u_0 = 1$ donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{2^k} = \frac{u_n - 1}{2^{n-1}}$
et $u_n = 2^n - n$ donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{2^k} = \frac{2^n - n - 1}{2^{n-1}} = \frac{2^n}{2^{n-1}} - \frac{n+1}{2^{n-1}} = 2 - \frac{n+1}{2^{n-1}}$

## Exercice 5 *9 points*

Soit $u$ la suite définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$

**1.** a) Avec Python, écrire un programme qui calcule les 100 premiers termes de la suite $u$ *1 point*

Comme la définition de la suite est récursive, on calcule les termes progressivement (on importe `numpy` pour la racine carrée) :

```
import numpy as np
u=2
for i in range(1,100):
  u=np.sqrt(1+u)
  print(u)
```

b) Calculer $u_1$, puis émettre une conjecture sur le sens de variations de la suite $u$ et le démontrer par récurrence. *2 points*

Par définition de la suite $u_1 = \sqrt{1+u_0} = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$, donc $u_1 \leqslant u_0$ (car $3 \leqslant 4 \Rightarrow \sqrt{3} \leqslant \sqrt{4} = 2$), on pressent donc que la suite est décroissante
pour $n \in \mathbb{N}$, on définit alors $P(n) : u_{n+1} \leqslant u_n$

Initialisation : comme nous venons de le voir $u_1 \leqslant u_0$ donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : pour $n \in \mathbb{N}$, supposons $P(n)$ vraie.
c'est-à-dire $u_{n+1} \leqslant u_n$ donc $1 + u_{n+1} \leqslant 1 + u_n$
et donc $\sqrt{1+u_{n+1}} \leqslant \sqrt{1+u_n}$ (par croissance de la racine carrée) i.e. $u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$
ce qui signifie que $P(n+1)$ est vraie
donc par théorème de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ est vraie.

**2.** Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on définit la fonction $f$ par $f(x) = \sqrt{1+x}$

a) Avec Python, définir la fonction $f$ puis la représenter sur l'intervalle $[0, 4]$ *1,5 points*

Avec `np.linspace` on définit une liste de 100 abscisses entre 0 et 4, puis on calcule les images et on représente avec les commandes classiques (avec la fonction $f$ définie au préalable).

```
import numpy as np
def f(x):
  return np.sqrt(x+1)
import matplotlib.pyplot as plt
x=np.linspace(0, 4, 100)
y=f(x)
plt.plot(x,y)
plt.show()
```

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant u_n \leqslant 2$ *1,5 points*

Par récurrence encore ! pour $n \in \mathbb{N}$, on définit alors $P(n) : 0 \leqslant u_n \leqslant 2$

Initialisation : $u_0 = 2$ donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : pour $n \in \mathbb{N}$, supposons $P(n)$ vraie
donc par hypothèse $0 \leqslant u_n \leqslant 2$ donc $1 \leqslant u_n + 1 \leqslant 3$ et donc $\sqrt{1} \leqslant \sqrt{1+u_n} \leqslant \sqrt{3}$ (par croissance de la racine carrée) soit $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant \sqrt{3}$
et a fortiori $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$, i.e. $P(n+1)$ est vraie
donc par théorème de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ est vraie.

c) Résoudre l'inéquation $f(x) - x \leqslant 0$ *2 points*

$f$ est définie sur $\mathbb{R}_+$,, on va donc chercher les solutions dans $\mathbb{R}_+$ (on peut d'ailleurs remarquer qu'il n'y a pas d'autre choix : car si $x$ est solution alors $x \geqslant f(x) \Rightarrow x \geqslant 0$ puisque $f(x) \geqslant 0$)
alors pour $x \in \mathbb{R}_+, f(x) - x \leqslant 0 \Leftrightarrow f(x) \leqslant x \Leftrightarrow \sqrt{x+1} \leqslant x \Leftrightarrow x + 1 \leqslant x^2$
l'équivalence est bien vérifiée ici car $x + 1 \leqslant x^2 \Rightarrow \sqrt{x+1} \leqslant \sqrt{x^2} \Rightarrow \sqrt{x+1} \leqslant |x|$ i.e. $\sqrt{x+1} \leqslant x$ car $x \geqslant 0$
finalement $f(x) - x \leqslant 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 \geqslant 0$
nous sommes donc ramenés à l'étude du trinôme $x^2 - x - 1$ qui a pour discriminant $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5$ et donc pour racines $x_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, donc le trinôme est positif à l'extérieur des racines et donc, sur $\mathbb{R}_+, f(x) - x \leqslant 0 \Leftrightarrow x \in \left[\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right[$

d) On admet que $\forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \leqslant u_n \leqslant 2$

A l'aide des deux questions précédentes, retrouver le sens de variations de la suite $u$ *1 point*

D'après **2.**c), $\forall x \geqslant \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, f(x) - x \leqslant 0$ ; de plus on admet que $\forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \leqslant u_n \leqslant 2$
donc $\forall n \in \mathbb{N}, f(u_n) - u_n \leqslant 0$
et par définition $f(u_n) = u_{n+1}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \leqslant 0$, i.e. $u$ est décroissante.