L'objectif n'est pas de finir, visez la qualité : $0+0+0+0<0,5$
Bon devoir !

Calculatrice interdite

Exercice 1 - vrai ou faux

Indiquer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.

Pour cet exercice (seulement), vous n'avez pas besoin de justifier. Les mauvaises réponses ne sont pas pénalisées.

a) $\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} \geqslant 0$

b) $x^2 = y^2 \Rightarrow x = y$

c) $|x^n| = |x|^n$

d) si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = an+b$ (avec a et b réels), alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique

e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{b_k} = \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{\sum_{k=1}^{n} b_k}$

f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1) = \sum_{k=0}^{n-1} k$

g) $\displaystyle\sum_{k=3}^{37} 4 = 140$

h) la fonction $x \mapsto \sqrt{x+x^3}$ est impaire

i) $\forall x \in \mathbb{R}, \lfloor -x \rfloor = -\lfloor x \rfloor$

j) $\displaystyle\binom{2024}{1} = 1$

Exercice 2 - questions diverses et indépendantes

1. Traduire mathématiquement les phrases suivantes en utilisant des quantificateurs :

a. l'exponentielle de tout réel est strictement positive ;

b. le carré de tout nombre entier est supérieur à lui-même.

2. Résoudre l'inéquation : $x^2 - 4|x| \leqslant 5$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \left\lfloor \frac{k}{n+1} \right\rfloor = n$

4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 4u_n - 6 \end{cases}$

Donner une expression explicite de u_n

5. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\begin{cases} v_0 = v_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} = 3v_{n+1} - 2v_n \end{cases}$

Donner une expression explicite de v_n

Exercice 3 - combien de crêpes ?

Charlotte se rend à la crêperie et elle a le choix entre 5 ingrédients pour garnir ses crêpes : roquefort, tomate, poisson fumé, œuf et jambon cru.

1. Dans un premier temps, Charlotte choisit une crêpe avec deux ou trois ingrédients, combien de choix peut-elle faire ?

2. Charlotte prend ensuite une deuxième crêpe dans les mêmes conditions. Combien de choix de deux crêpes Charlotte aura-t-elle pu faire au total ? (on considère que « une crêpe tomate puis une crêpe roquefort » est un choix différent de « une crêpe roquefort puis une crêpe tomate »).

Exercice 4

On définit la suite u par $u_0 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n - 3} + 3$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n$ existe et $u_n > 4$

2. Pour $x \geqslant 3$, on pose $f(x) = \sqrt{x-3} + 3$ et $g(x) = f(x) - x$

a. Pour $x \geqslant 3$, calculer $g'(x)$ et en déduire les variations de $g(x)$

b. Calculer $g(4)$ et en déduire le signe de $f(x) - x$ pour $x \geqslant 3$

3. Montrer que la suite u est décroissante.

4. On introduit la suite v définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \ln(u_n - 3)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n$ existe.

5. Reconnaitre la suite v et exprimer v_n en fonction de n

6. En déduire l'expression de u_n en fonction de n

7. Avec Python,

a. écrire un programme qui calcule les 101 premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

b. Le programme renvoie `4.4142 ; 4.1892 ; 4.0905 ; 4.0443 ; 4.0219 ; 4.0109 ; 4.0054 ; 4.0027 ; 4.0014 ; 4.0007 ...`
Emettre une conjecture sur la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

c. En notant ℓ la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, déterminer le rang du premier terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $|u_n - \ell| \leqslant 10^{-5}$

Exercice 5 - étude d'une somme

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \times k!$

1. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, k \times k! = (k+1)! - k!$
2. En déduire l'expression de S_n en fonction de n. Vérifier avec S_3

Exercice 6 - deux suites et une somme

On étudie les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies de la façon suivante :
$$\begin{cases} a_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = 2a_n + b_n \\ b_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad b_{n+1} = 2b_n \end{cases}$$

1. De quel type est la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$? En déduire une expression de b_n en fonction de n
2. Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $c_n = \dfrac{a_n}{2^n}$, pour tout entier naturel n
   - **a.** Justifier que $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $\dfrac{1}{2}$ et préciser son premier terme.
   - **b.** En déduire une expression de c_n en fonction de n
   - **c.** Déduire des questions précédentes que : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = n2^{n-1}$
3. Application au calcul d'une somme
   - **a.** Justifier que les termes de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient :
     $\forall k \in \mathbb{N}, a_k = a_{k+1} - a_k - 2^k$
   - **b.** Montrer qu'on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(a_{k+1} - a_k) = a_{n+1}$
   - **c.** Pour tout entier naturel n, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k$
   - **d.** Déduire des questions précédentes qu'on a :
     $\forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k2^{k-1} = (n-1)2^n + 1$

Exercice 7 - études de fonctions

Partie I

On onsidère les fonctions P et g définies respectivement sur $\mathbb{R}$ et $]0;+\infty[$ par : $P(x) = 3x^3 - x - 2$ et $g(x) = x^3 - x + 3 - 2\ln(x)$

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = (x-1)(3x^2 + 3x + 2)$
2. Calculer $g'(x)$ et l'exprimer en fonction de $P(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, puis en déduire que son signe est celui de $P(x)$ pour tout $x \in]0;+\infty[$
3. En déduire les variations de g
4. En déduire que $\forall x \in]0;+\infty[, g(x) > 0$

Partie II

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = x + 1 + \dfrac{x - 1 + \ln(x)}{x^2}$ et on note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Ecrire un programme Python qui définit la fonction f
2. Dériver f et mettre le résultat sous la forme $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^k}$ pour tout $x \in]0;+\infty[$, où k est un entier dont on précisera la valeur.
3. En déduire les variations de f
4. Déterminer une équation de T_1, la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1
5. Ecrire un programme Python qui représente f et sa tangente T_1 sur l'intervalle $[0,1;7]$
6. Montrer que $\forall x \geqslant 1, f(x) \geqslant x + 1$ et que $\forall x \in]0,1], f(x) \leqslant x + 1$
   En déduire la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite Δ d'équation $y = x + 1$
7. Représenter l'allure de $\mathscr{C}_f$
   On admettra que $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$ *et que* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x - 1 + \ln(x)}{x^2} = 0$

Partie III

On considère la fonction h définie par $h(x) = x^{\left(1 - \frac{1}{x}\right)}$

1. Déterminer $\mathscr{D}_h$, l'ensemble de définition de h, puis son ensemble de dérivabilité et dériver h
2. A l'aide de la question **II.6.**, donner les variations de h
3. Résoudre l'équation $h(x) \geqslant x$ sur $]0;+\infty[$ et en déduire la position relative de $\mathscr{C}_h$ et de $\mathscr{D}$ la droite d'équation : $y = x$