

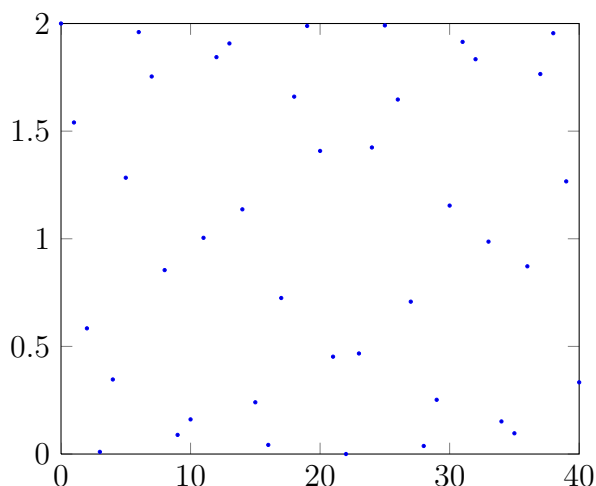
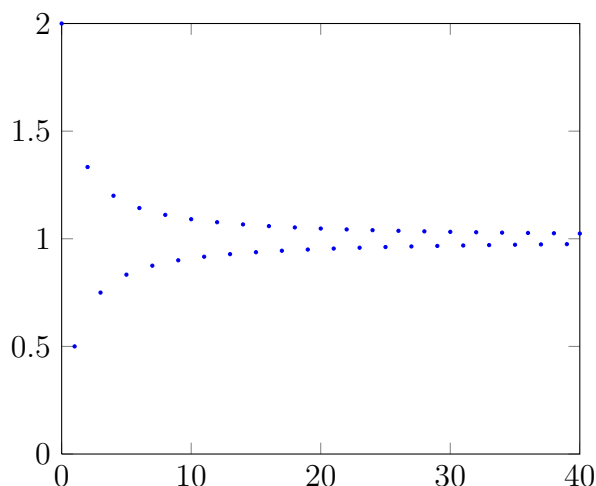
Objectifs d'apprentissage

A la fin de ce chapitre, je sais :

- déterminer une limite à l'aide des suites de référence. ☐
- déterminer une limite à l'aide des propriétés sur les limites : opérations et encadrement. ☐
- montrer l'existence d'une limite grâce à la monotonie d'une suite. ☐
- déterminer une limite à l'aide des croissances comparées de suites. ☐
- démontrer que deux suites sont adjacentes et déterminer leur limite commune. ☐
- utiliser la convergence des deux sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) pour montrer celle de (u_n) ☐

1 Introduction

Comment définir la notion de limite ? Regardons l'allure de deux suites.



Dans le premier cas, on voit que les termes deviennent infiniment proches de 1, dans le deuxième cas, aucune tendance ne semble se dégager.

2 Limites, définitions

2.1 Convergence d'une suite

Définition : une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite **convergente** s'il existe un réel ℓ tel que :

« tout intervalle ouvert contenant ℓ , contient toutes les valeurs de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sauf un nombre fini d'entre elles ».

On dira alors que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge vers** ℓ et on notera $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ ou $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$ ou $u_n \rightarrow \ell$

Remarques :

- la définition est équivalente à « tout intervalle ouvert contenant ℓ , contient toutes les valeurs de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à partir d'un certain rang » ;
- la convergence signifie donc une limite finie.

Définition : une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite **divergente** si elle ne converge pas.

Exemple (pour le faire une fois) : démontrons que $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tend vers 0

Soit $] \alpha, \beta[$ tel que $0 \in] \alpha, \beta[$ (i.e. $] \alpha, \beta[$ est un intervalle ouvert contenant 0).

alors $\frac{1}{\sqrt{n}} < \beta \Leftrightarrow \sqrt{n} > \frac{1}{\beta}$ (car $\beta > 0$ et la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$)
alors $\frac{1}{\sqrt{n}} < \beta \Leftrightarrow n > \frac{1}{\beta^2}$ (car les fonctions carré et $\sqrt{\cdot}$ sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}_+$)
alors en posant alors $n_0 = \left\lfloor \frac{1}{\beta^2} \right\rfloor + 1$ (ou un entier plus grand que $\frac{1}{\beta^2}$),
 $\forall n \geq n_0, \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \beta$ donc $\frac{1}{\sqrt{n}} \in]\alpha, \beta[$ donc $] \alpha, \beta[$ contient tous les termes de la suite sauf un nombre fini (seuls les termes de rang $1, 2, \dots, n_0 - 1$ peuvent être en dehors de cet intervalle)
et ce pour un intervalle $] \alpha, \beta[$ (contenant 0) quelconque, donc $\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0

2.2 Limites infinies

Définition : on dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **tend vers** $+\infty$ (ou **diverge vers** $+\infty$) si :

« tout intervalle de type $[A, +\infty[$ ($A > 0$), contient toutes les valeurs de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sauf un nombre fini d'entre elles ».

On notera alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ ou $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ ou $u_n \rightarrow +\infty$

on dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **tend vers** $-\infty$ (ou **diverge vers** $-\infty$) si :

« tout intervalle de type $] -\infty, A]$ ($A < 0$), contient toutes les valeurs de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sauf un nombre fini d'entre elles ».

On notera alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ ou $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty$ ou $u_n \rightarrow -\infty$

Exemples :

- la suite $(n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$
- la suite $\left(\ln \left(\frac{1}{n+1} \right) \right)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$

$\triangle$ une suite divergente ne tend pas forcément vers $+\infty$, cf. le contre-exemple : $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$

Théorème : si une suite admet une limite (finie ou infinie), alors cette limite est unique.

3 Limites de référence

Propriétés :

- pour $\alpha > 0$, $n^\alpha \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ et $\frac{1}{n^\alpha} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$
- pour $a > 0$, $e^{an} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ et $(\ln(n))^a \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$
en particulier $e^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ et $\ln(n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$

Exemples :

- $n^{\frac{3}{2}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ $n^{-7} = \frac{1}{n^7} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$
- $e^{3n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ $e^{\frac{n}{2}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$
- $(\ln(n))^5 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ $(\ln(n))^{\frac{1}{3}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$

Propriétés - limites des suites géométriques : soit $q \in \mathbb{R}$

- si $q > 1$, $q^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$
- si $-1 < q < 1$, i.e. $|q| < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$
- si $q \leq -1$, la suite $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.
- si $q = 1$, $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante égale à 1 et $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$

Exemples :

- $2^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ $\left(\frac{5}{4} \right)^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$
- $\left(\frac{1}{7} \right)^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ $\left(-\frac{1}{2} \right)^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$
- $((-3)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.

4 Propriétés sur limites

4.1 Propriétés des suites convergentes et opérations sur les limites

Propriétés : soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente, de limite ℓ , alors $(u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ	Remarque : en posant $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{n+1}$, c'est évident avec la définition de la limite.
Propriétés : si les sous-suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers ℓ alors $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$	avec $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $u_{2n} = \frac{1}{2n}$ et $u_{2n+1} = \frac{1}{2n+1}$ or $u_{2n} \rightarrow 0$ et $u_{2n+1} \rightarrow 0$ donc $u_n \rightarrow 0$

Propriétés - opérations sur les limites des suites convergentes : soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites convergentes de limites ℓ et ℓ' , alors : $(u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $\ell + \ell'$ $(u_n \times v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $\ell \times \ell'$ - si $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \neq 0$ et $\ell' \neq 0$ alors $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $\frac{\ell}{\ell'}$ en particulier dans ce cas, $\left(\frac{1}{v_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $\frac{1}{\ell'}$	Exemples : $\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$ donc $\frac{n+1}{n} \rightarrow 1$ $\frac{n+1}{4n} \rightarrow \frac{1}{4} \times 1 = \frac{1}{4}$ $\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 5}{\frac{1}{n} + 3} \rightarrow \frac{-5}{2} = -\frac{5}{2}$ car $\left(\frac{1}{2}\right)^n - 5 \rightarrow -5$ et $\frac{1}{n} + 3 \rightarrow 3$
--	--

Propriétés - opérations plus générales sur les limites : cf. fin du poly
--

Remarque : une suite convergente est bornée mais la réciproque est fausse (quel contre-exemple?).

4.2 Limites et inégalités

Propriété : soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite positive (i.e. telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$) qui converge vers ℓ , alors $\ell \geq 0$	Remarque : si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$, on ne peut pas pour autant en déduire $\ell > 0$, comme le montre : $u_n = \frac{1}{n} > 0$, dont la limite est 0
Propriété : si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ et si $a < \ell < b$, alors à partir d'un certain rang $a \leq u_n \leq b$	Par exemple avec une suite qui converge vers 1, tous ses termes sont compris entre 0 et 2 à partir d'un certain rang.
Propriété (passage à la limite dans les inégalités larges) : soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles convergent vers ℓ et ℓ' et telles que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$ alors $\ell \leq \ell'$	utile quand on ne connaît pas la limite par exemple on peut montrer que la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + u_n}{2}$ est convergente et que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 1$, alors $0 \leq \ell \leq 1$
Théorème des gendarmes (ou d'encadrement) : soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ trois suites telles que $\forall n \geq 0, u_n \leq v_n \leq w_n$ <u>cas convergent</u> si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers un même réel ℓ alors $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et elle converge vers ℓ <u>cas divergent</u> (juste avec $u_n \leq v_n$) $\triangleright$ si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ alors $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ $\triangleright$ si $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$ alors $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$	Exemples : - pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^2}$ on montre d'abord que $\frac{n}{4n^2} \leq u_n \leq \frac{n}{n^2}$ alors $u_n \rightarrow 0$ car $\frac{1}{4n} \rightarrow 0$ et $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ - on pose $v_n = n^2 + e^{\frac{1}{n+1} + \ln n}$ on peut alors se contenter de dire $u_n \leq v_n$ avec $u_n = n^2$ et $u_n \rightarrow +\infty$ ce qui entraîne $v_n \rightarrow +\infty$

Théorème de la limite monotone : soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

- si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante :
 - ▷ cas 1 : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
 - ▷ cas 2 : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est non majorée, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$
- si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante
 - ▷ cas 1 : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
 - ▷ cas 2 : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est non minorée, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$

Exemple : soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$

On admet que $\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)! \geq 2^n$ (à montrer par récurrence).

Montrons que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, n! \geq 2^{n-1} \Rightarrow \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}} \text{ et donc } u_n \leq 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2^j}$$

or $\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2^j} = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} \leq 2$ et de fait $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée (par 3). De plus elle est croissante

$(u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)!})$ donc d'après le théorème de la limite monotone, elle est convergente.

5 Croissances comparées

Propriétés - croissances comparées : soit $a > 0$, $b > 0$ et $q > 1$, alors

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\ln n)^a}{n^b} = 0 \quad \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^b}{q^n} = 0 \quad (\text{en part. : } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^b}{e^{an}} = 0) \quad \text{c) de fait } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\ln n)^a}{q^n} = 0$$

Remarque : on peut inverser les limites. Par ailleurs, on résume en écrivant $(\ln n)^a \ll n^b \ll q^n$

Exemples : $u_n = \frac{\ln(n) - e^n}{\sqrt{n}} \quad v_n = \frac{e^n - n^2}{2^n} \quad w_n = \frac{e^{-n} + \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{\ln(n)}}$

$$u_n = \frac{\ln n}{\sqrt{n}} - \frac{e^n}{\sqrt{n}} \text{ donc } u_n \rightarrow -\infty; v_n = \left(\frac{e}{2}\right)^n - \frac{n^2}{2^n} \text{ donc } v_n \rightarrow +\infty \text{ et } w_n = \frac{ne^{-n} + 1}{\frac{1}{n} + \frac{n}{\ln(n)}} \text{ donc } w_n \rightarrow 0$$

6 Suites adjacentes

Définition : deux suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont dites **adjacentes** si

- 1) $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante 2) $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante 3) $(u_n - v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0

Exemple : $u_n = 1 - \frac{1}{2^n}$ et $v_n = 1 + \frac{1}{n}$

Propriété : deux suites adjacentes sont convergentes et ont même limite.

Exemple : soit u et v définies par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}, v_n = u_n + \frac{1}{n!}$

Montrer que u et v sont adjacentes. Conclure.

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est croissante (vu plus haut) et } v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!}$$

$$\text{donc } v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{2}{n+1} - 1 \right) \leq 0 \text{ (pour } n > 0) \text{ de plus } u_n - v_n = -\frac{1}{(n+1)!} \text{ donc } u_n - v_n \rightarrow 0$$

donc u et v sont adjacentes et de fait elles convergent vers une même limite (qui vaut e).

7 Des méthodes officielles

7.1 Déterminer la limite d'une suite récurrente convergente

Pour s'entraîner : exercices 3, 4, 5, 7, 8 et 15

L'idée : « la limite est forcément un point fixe » ($f(\ell) = \ell$).

Exemple : soit une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la relation $u_{n+1} = u_n - u_n^2$ et $u_0 \in [0; 1]$

On peut démontrer que cette suite est décroissante et minorée par 0, elle est donc convergente d'après le théorème de la limite monotone. On note ℓ sa limite.

D'après les propriétés sur les limites (4.1) : $u_n \rightarrow \ell \Rightarrow u_{n+1} \rightarrow \ell$

et de plus $u_n - u_n^2 \rightarrow \ell - \ell^2$ donc en passant à la limite dans l'égalité, on obtient : $\ell = \ell - \ell^2$ et de fait $\ell^2 = 0$

et finalement ici $\ell = 0$

7.2 Bien utiliser les croissances comparées

Pour s'entraîner : exercice 10

Le recours à cette méthode n'est pas toujours indispensable, mais elle est efficace pour la justification.

L'idée : « on factorise par les plus gros ».

Exemple : que vaut $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + \ln n + (-1)^n}{2^n - n^5 + (\ln n)^{12}}$?

Une rapide analyse nous permet de comprendre que les termes dominants qui vont déterminer la limite sont n^2 au numérateur et 2^n au dénominateur, mais il est trop rapide d'écrire d'emblée :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + \ln n + (-1)^n}{2^n - n^5 + (\ln n)^{12}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2^n}$$

On factorise donc par n^2 au numérateur et 2^n au dénominateur :

$$\frac{n^2 + \ln n + (-1)^n}{2^n - n^5 + (\ln n)^{12}} = \frac{n^2 \left(1 + \frac{\ln n}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n^2} \right)}{2^n \left(1 - \frac{n^5}{2^n} + \frac{(\ln n)^{12}}{2^n} \right)}$$

d'abord $-1 \leq (-1)^n \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{n^2} \leq \frac{(-1)^n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = 0$ d'après le théorème des gendarmes les croissances comparées nous permettent alors de dire :

d'une part $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^2} = 0$ (et $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = 0$) et donc $\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{\ln n}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n^2} = 1$

d'autre part $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5}{2^n} = 0$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\ln n)^{12}}{2^n} = 0$ et donc $\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{n^5}{2^n} + \frac{(\ln n)^{12}}{2^n} = 1$

de plus $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2^n} = 0$ et donc par opérations sur les limites $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + \ln n + (-1)^n}{2^n - n^5 + (\ln n)^{12}} = 0 \times \frac{1}{1} = 0$

7.3 Multiplication par le conjugué

Calculer la limite de $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

On appelle conjugué de $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ l'expression $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$

La multiplication fait apparaître une identité remarquable qui permet de simplifier la différence des

racines : $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \times \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$

$$\text{donc } u_n = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$\text{donc } u_n = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \text{ et donc } u_n \rightarrow 0$$

Synthèse : opérations générales sur les limites de suites

Cette section complète la section éponyme du cours : 4.1

Dans toute la section, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux suites réelles et ℓ et ℓ' sont deux nombres réels.

Dans certains cas, on ne peut donner un résultat général, on parlera alors de « forme indéterminée », que l'on abrègera en « FI ».

a) Limite d'une somme

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n)$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

b) Limite d'un produit

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	ℓ	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	0
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \times v_n)$	$\ell \times \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	FI

c) Limite d'un quotient, dans le cas où $\ell' \neq 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \neq 0$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	∞	$\ell \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	ℓ'	ℓ'	∞	0	0	0	0
$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	0	∞	∞	FI	∞	∞	∞	FI

Attention au signe de v_n dans les cas où elle tend vers 0. Les formules ne sont valables que si (v_n) est de signe constant à partir d'un certain rang (cf. $v_n = \frac{(-1)^n}{n}$).

Conclusion : les 4 types de formes indéterminées sont $+\infty - \infty$; $+\infty \times 0$; $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$

Exemples sur les formes indéterminées : ou pourquoi ne peut-on pas conclure systématiquement ?

Avec l'addition :

Si $u_n = n^2$ et $v_n = n$
 alors $u_n \rightarrow +\infty$ et $v_n \rightarrow +\infty$
 et dans ce cas $u_n - v_n = n^2 - n = n(n-1)$
 donc pour $n > 1, u_n - v_n \geq n$
 et donc $u_n - v_n \rightarrow +\infty$
 plus simplement avec de suites linéaires :
 $u_n = 4n, v_n = 3n$ et $u_n - v_n \rightarrow +\infty$
 $u_n = n + 1, v_n = n$ et $u_n - v_n \rightarrow 1$
 $u_n = 2n, v_n = 7n$ et $u_n - v_n \rightarrow -\infty$

Avec la multiplication (ou la division) :

Si $u_n = n^2$ et $v_n = \frac{1}{n}$ alors $u_n \rightarrow +\infty$ et $v_n \rightarrow 0$
 et $u_n v_n = n$ donc $u_n v_n \rightarrow +\infty$
 en modifiant un peu :
 $u_n = n$ et $v_n = \frac{1}{n^2}$ alors $u_n v_n = \frac{1}{n}$ donc $u_n v_n \rightarrow 0$
 enfin avec $u_n = 3n + 5$ et $v_n = \frac{1}{n+2}$
 alors $u_n v_n = \frac{3n+5}{n+2} = \frac{3n}{n+2} \times \frac{1+\frac{5}{3n+2}}{1+\frac{1}{n+2}}$, $u_n v_n \rightarrow 3$