Eléments de corrigé

1. Soit P un polynôme et Q une fonction définie par $Q(x) = P(x+1)$.
Alors Q est un polynôme ?

☒ Oui ☐ Non

En utilisant la définition P peut s'écrire $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ et donc $P(x+1) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x+1)^k$ or quel que soit k, $(x+1)^k$ est une fonction polynomiale, donc Q le sera aussi.

2. Soit P la fonction définie par $P(x) = (\sqrt{11})x^7 + \sqrt{3}$. Quel est l'ensemble de définition de P ?

☐$[0;+\infty[$ ☐$]0;+\infty[$ ☒$\mathbb{R}$ ☐$\mathbb{R}^*$

P est un polynôme, il est donc défini sur $\mathbb{R}$.

3. Soit P un polynôme qui s'écrit $P(x) = (x-a)Q(x)$ où Q est un polynôme.
Que vaut $P(a)$?

Il suffit de remplacer $P(a) = (a-a)Q(a) = 0 \times Q(a) = 0$

4. Soit P la fonction définie par $P(x) = -x^{2020} + x^{2021} + 2$
Alors P peut s'écrire (Q est un polynôme)

☐$P(x) = (x-1)Q(x)$ ☒$P(x) = (x+1)Q(x)$ ☐$P(x) = (x-2)Q(x)$ ☐$P(x) = x^{2020}Q(x)$

-1 est racine de P, donc P peut être factorisé par $x+1$.

5. Soit P un polynôme de degré 3 qui s'écrit sous la forme $P(x) = (x^2 + 11x - 9)Q(x)$ où Q est un polynôme.
Quel est le degré de Q ?

Comme P s'écrit sous la forme d'un produit de polynômes : $\deg(P) = \deg(X^2+11X-9)+\deg(Q)$ donc $3 = 2 + \deg(Q)$ donc $\deg(Q) = 1$

6. Soit P la fonction définie par $P(x) = (x^3 - x^2)^7$.
Quel est le degré de P ?

P s'écrit comme un polynôme puissance 7, donc : $\deg(P) = 7 \times \deg(X^3 - X^2) = 21$

7. P est un polynôme de degré 8. On pose $Q(x) = x^2 P(x)$.
Quel est le degré de Q', le polynôme dérivé de Q ?

Dans un premier temps, on trouve $\deg(Q) = \deg(P) + 2 = 10$ dont on déduit $\deg(Q') = 9$

8. Soit P un polynôme de degré n. Si P peut s'écrire comme produit de polynômes de degré 1, alors

☐ P admet n racines ☐ P admet $n+1$ racines
☒ P admet au plus n racines ☐ P n'admet aucune racine

Voir le cours (et le contre-exemple), s'écrire comme produit de polynômes de degré 1 ne signifie pas n racines distinctes.

9. Soit P un polynôme. Soit Q le polynôme défini par $Q(x) = xP(x)$. Si P peut s'écrire comme produit de polynômes de degré 1, alors Q peut s'écrire comme produit de polynômes de degré 1.

☒ Vrai ☐ Faux

Par hypothèse, P peut s'écrire $P(x) = \lambda(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n)$ avec $\lambda \neq 0$ donc $Q(x) = \lambda x(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n)$, ce qui est un produit de polynômes de degré 1.

10. Soit P un polynôme de degré au moins 1. Si P peut s'écrire comme produit de polynômes de degré 1, alors P admet au moins une racine.

☒ Vrai ☐ Faux

Par hypothèse et comme le degré vaut au moins 1. $P(\alpha_1) = 0$ par exemple.