## Eléments de corrigé

**1.** Soit $P$ un polynôme. Si $\alpha$ est une racine de $P$ alors $-\alpha$ est une racine du polynôme $Q = -P$.

☐ Vrai ☒ Faux

Il suffit d'un contre-exemple $P(x) = x - 1$ et $\alpha = 1$ : $-1$ n'est pas racine de $Q(x) = -x + 1$ (par contre 1 l'est).

**2.** Soit $P$ un polynôme. Si la fonction associée $x \mapsto P(x)$ est une fonction impaire alors 0 est une racine de $P$.

☒ Vrai ☐ Faux

Par définition (impaire), $\forall x \in \mathbb{R}, P(-x) = -P(x)$. En particulier $P(-0) = -P(0)$, i.e. $2P(0) = 0$, donc $P(0) = 0$

**3.** Soit $P$ le polynôme défini par $P(x) = (x+7)^{12}$ alors $P$ peut-il s'écrire comme produit de polynômes de degré 1 ?

☒ Oui ☐ Non

C'est déjà le cas.

**4.** Soit $P$ le polynôme défini par $P(x) = (x - \dfrac{3}{2})^2 + 4$ alors $P$ peut-il s'écrire comme produit de polynômes de degré 1 ?

☐ Oui ☒ Non

On remarque que $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) > 0$, donc $P$ n'admet pas de racine (et il ne peut donc pas s'écrire comme produit de polynômes de degré 1).

**5.** Soit $P$ le polynôme défini par $P(x) = x^2 + x - \pi^{2002}$ alors $P$ peut-il s'écrire comme produit de polynômes de degré 1 ?

☒ Oui ☐ Non

Le discriminant de ce trinôme est strictement positif, donc il admet deux racines distinctes($x_1$ et $x_2$) et il peut de fait s'écrire sous la forme : $a(x - x_1)(x - x_2)$

**6.** Soit $P$ le polynôme défini par $P(x) = x^3 - x$ alors $P$ peut-il s'écrire comme produit de polynômes de degré 1 ?

☒ Oui ☐ Non

$P(x) = x(x^2 - 1) = x(x-1)(x+1)$

**7.** Soit $P$ le polynôme défini par $P(x) = (x-2)^2$ alors 2 est une racine de $P'$.

☒ Vrai ☐ Faux

$P'(x) = 2(x-2)$, donc $P'(2) = 0$, 2 est bien une racine.

**8.** Plus généralement si $\alpha$ est une racine d'un polynôme $P$ alors $\alpha$ est une racine de son polynôme dérivé $P'$ ?

☐ Vrai ☐ ☒ Faux

Un contre-exemple suffit, si $P(x) = (x-1)(x-2)$ alors $P$ admet 1 et 2 pour racines, mais ce n'est pas le cas de $P'$ puisque $P'(x) = 2x - 3$

**9.** Soit $P$ un polynôme (non nul) admettant au moins 3 racines distinctes, alors

☐ $\deg P = 3$ ☐ $\deg P \leqslant 3$ ☒ $\deg P \geqslant 3$ ☐ $\deg P = 4$

Si on note $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ces racines alors on peut écrire $P$ sous la forme $P(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)Q(x)$ où $Q$ est un polynôme, donc $\deg(P) \geqslant 3$

**10.** Soit $P$ un polynôme défini par $P(x) = -4x^9 + 11x^6 - 53x^4 + 901x^3 + e$ alors $P \in$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\square\mathbb{R}_0[X]$ | $\square\mathbb{R}_1[X]$ | $\square\mathbb{R}_3[X]$ | $\square\mathbb{R}_4[X]$ | $\square\mathbb{R}_6[X]$ |
| $\boxtimes\mathbb{R}_9[X]$ | $\boxtimes\mathbb{R}_{10}[X]$ | $\boxtimes\mathbb{R}_{11}[X]$ | $\boxtimes\mathbb{R}_{20}[X]$ | $\boxtimes\mathbb{R}_{1000}[X]$ |

Par définition, $\mathbb{R}_4[X]$ contient tous les polynômes de degré inférieur ou égal à $n$.