Eléments de corrigé

1. Que vaut $\lim_{n\to\infty} e^{-3n}$?

$e^{-3n} = \dfrac{1}{e^{3n}}$ et $\lim_{n\to\infty} e^{3n} = +\infty$ (cours) donc par opération (inverse ou quotient) $\lim_{n\to\infty} e^{-3n} = 0$

2. Que vaut $\lim_{n\to\infty} \dfrac{e^{8n}}{1+\frac{1}{2^n}}$?

De même $\lim_{n\to\infty} e^{8n} = +\infty$ et $\dfrac{1}{2^n} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ donc (q^n avec $|q|<1$) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$ (limites de référence)

donc par opérations sur les limites $\lim_{n\to\infty} 1 + \dfrac{1}{2^n} = 1$ puis $\lim_{n\to\infty} \dfrac{e^{8n}}{1+\frac{1}{2^n}} = +\infty$

3. Que vaut $\lim_{n\to\infty} \dfrac{3}{n^2+n^9-5}$? $\lim_{n\to\infty} \dfrac{3}{n^2+n^9-5} = 0$, en effet $\lim_{n\to\infty} n^2 = n^9 = +\infty$ donc par addition $\lim_{n\to\infty} n^2+n^9-5 = +\infty$ et par quotient, on a le résultat.

4. Que vaut $\lim_{n\to\infty} \dfrac{-4+5\times\left(\frac{2}{7}\right)^n}{2+\frac{1}{n}}$? $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{2}{7}\right)^n = 0$ (q^n avec $|q|<1$) et $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ (limites de référence) donc par opérations sur les limites $\lim_{n\to\infty} \dfrac{-4+5\times\left(\frac{2}{7}\right)^n}{2+\frac{1}{n}} = \dfrac{-4+5\times 0}{2+0} = -2$

5. Que vaut $\lim_{n\to\infty} (-4)^n$? Cette limite n'existe pas d'après le cours (q^n avec $q<-1$).

6. Que vaut $\lim_{n\to\infty} \dfrac{(\ln(n))^7}{1+\frac{1}{\ln(n)}}$?

$\lim_{n\to\infty} (\ln(n))^a = +\infty$ d'après le cours (lim. de référence) donc $\lim_{n\to\infty} (\ln(n))^7 = +\infty$ et $\lim_{n\to\infty} \ln(n) = +\infty$

de fait, par opérations, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{\ln(n)} = 0$ puis $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{1+\ln(n)} = 1$ et enfin $\lim_{n\to\infty} \dfrac{(\ln(n))^7}{1+\ln(n)} = +\infty$

7. Que vaut $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{\frac{1}{(\ln(n))^{10}}}$?

$\dfrac{n^2}{\frac{1}{(\ln(n))^{10}}} = n^2(\ln(n))^{10}$, $\lim_{n\to\infty} (\ln(n))^{10} = +\infty$ et $\lim_{n\to\infty} n^2 = +\infty$ et par produit : $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{\frac{1}{(\ln(n))^{10}}} = +\infty$

8. Que vaut $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{n^2}}$? $\dfrac{\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{n^2}} = \dfrac{n^2}{2^n}$ donc par croissance comparée $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{n^2}} = +\infty$

9. Que vaut $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n+18}}$? $n \leqslant n+1 \leqslant n+18$ donc $\sqrt{n} \leqslant \sqrt{n+1} \leqslant \sqrt{n+18}$ (la fonction $\sqrt{.}$ étant croissante)

donc $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{n+18}}$ or $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$ (car $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = +\infty$ et par quotient)

donc par encadrement $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n+18}} = 0$ et donc $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n+18}} = 0$

10. Que vaut $\lim_{n\to\infty} \dfrac{(-3)^n}{n}$? cette limite n'existe pas, on peut le justifier en précisant que les suites extraites des entiers pairs et impairs n'ont pas la même limite : $\dfrac{(-3)^{2n}}{2n} = \dfrac{3^{2n}}{2n}$ donc $\lim_{n\to\infty} \dfrac{(-3)^{2n}}{2n} = +\infty$ et $\dfrac{(-3)^{2n+1}}{2n+1} = -\dfrac{3^{2n+1}}{2n+1}$ donc $\lim_{n\to\infty} \dfrac{(-3)^{2n+1}}{2n+1} = +\infty$