Eléments de corrigé

1. Que vaut $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4^n - n^{11}}{(\ln(n))^{33} + e^{-n}}$? on factorise par les termes dominants : 4^n et $(\ln(n))^{33}$

$$\frac{4^n - n^{11}}{(\ln(n))^{33} + e^{-n}} = \frac{4^n\left(1 - \frac{n^{11}}{4^n}\right)}{(\ln(n))^{33}\left(1 + \frac{1}{(\ln(n))^{33}e^n}\right)} = \frac{4^n}{(\ln(n))^{33}} \frac{\left(1 - \frac{n^{11}}{4^n}\right)}{\left(1 + \frac{1}{(\ln(n))^{33}e^n}\right)}$$

donc $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4^n - n^{11}}{(\ln(n))^{33} + e^{-n}} = +\infty$ car $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4^n}{(\ln(n))^{33}} = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{11}}{4^n} = 0$, de plus $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{(\ln(n))^{33}e^n}$
(les deux premières par croissance comparées, la troisième par limites de référence et opérations)

2. Que vaut $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^{8n}}{n^2}$? 0 en inversant le résultat de croissance comparée $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{e^{8n}} = 0$

3. Que vaut $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4^n - 3^n}{5^n + 2^n}$? $\dfrac{4^n - 3^n}{5^n + 2^n} = \dfrac{4^n}{5^n} \times \dfrac{1 - \frac{3^n}{4^n}}{1 + \frac{2^n}{5^n}} = \left(\dfrac{4}{5}\right)^n \dfrac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n}{1 + \left(\frac{2}{5}\right)^n}$

donc $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4^n - 3^n}{5^n + 2^n} = 0$ par opérations car $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{4}{5}\right)^n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3}{4}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2}{5}\right)^n = 0$

4. Que vaut $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$? 0 (cf. cours et méthode du conjugué).

5. Que vaut $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3}{-1 + \frac{3}{9^n}}$? $\lim\limits_{n\to\infty} 9^n = +\infty$ donc par opération $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3}{9^n} = 0$

de plus $\lim\limits_{n\to\infty} n^3 = +\infty$ donc par opération $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3}{-1 + \frac{3}{9^n}} = -\infty$

6. Que vaut $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(\ln(n))^7}{\sqrt{n} + \frac{1}{\ln(n)}}$? $\dfrac{(\ln(n))^7}{\sqrt{n}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}\ln(n)}\right)} = \dfrac{(\ln(n))^7}{\sqrt{n}} \times \dfrac{1}{1 + \frac{1}{\sqrt{n}\ln(n)}} = \dfrac{(\ln n)^7}{n^{\frac{1}{2}}} \times \dfrac{1}{1 + \frac{1}{\sqrt{n}\ln(n)}}$

or $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(\ln(n))^7}{n^{\frac{1}{2}}} = 0$ par croissance comparée et $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}\ln(n)} = 0$ (inverse d'un produit de limites de référence)

7. Que vaut $\lim\limits_{n\to\infty} ne^{-n}$? $ne^{-n} = \dfrac{n}{e^n}$ donc $\lim\limits_{n\to\infty} ne^{-n} = 0$ car par croissance comparée $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{e^n}$

8. Que vaut $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n}$? Cela ne fait pas partie de nos outils, mais on peut montrer que $0 \leqslant \dfrac{n!}{n^n} \leqslant \dfrac{1}{n}$

donc par théorème des gendarmes $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$

9. En supposant que $\forall n \in \mathbb{N}, 6 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{12n+2}{2n-8}$

Que vaut $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$? $\dfrac{12n+2}{2n-8} = \dfrac{12n}{2n} \times \dfrac{1 + \frac{2}{12n}}{1 - \frac{8}{2n}} = 6 \times \dfrac{1 + \frac{2}{12n}}{1 - \frac{8}{2n}}$

donc $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + \frac{2}{12n}}{1 - \frac{8}{2n}} = 1$ et donc $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{12n+2}{2n-8} = 6$ donc par théorème des gendarmes $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 6$

10. En supposant que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant \dfrac{n^2 - n^3}{\ln(n)}$ n^3 prédomine sur n^2, on va donc factoriser par n^3

Que vaut $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$? $\dfrac{n^2 - n^3}{\ln(n)} = \dfrac{n^3\left(\frac{n^2}{n^3} - 1\right)}{\ln(n)} = \dfrac{n^3}{\ln(n)} \times \left(\dfrac{n^2}{n^3} - 1\right) = \dfrac{n^3}{\ln(n)} \times \left(\dfrac{1}{n} - 1\right)$

or $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3}{\ln(n)} = +\infty$ par croissance comparée, donc par opération $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3}{\ln(n)} \times \left(\dfrac{1}{n} - 1\right) = -\infty$