Objectifs d'apprentissage

A la fin de ce chapitre, je sais :
- utiliser les définitions et notations de base : matrice, matrice ligne, matrice colonne, inverse, matrices symétriques, triangulaires ou diagonales, A^n, I_n, ${}^{t}A$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ ☐
- calculer le résultat d'opérations sur les matrices : addition, multiplication par un réel, multiplication de matrices, puissances. ☐
- définir la transposée de matrices et utiliser les propriétés de calcul ☐
- utiliser et dans certains cas déterminer, l'inverse d'une matrice ☐

1 Définitions

Définition : soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$

une **matrice** à n lignes et p colonnes est un tableau de nombres réels, possédant n lignes et p colonnes. Une telle matrice est dite **de taille** (n,p) (on dit aussi matrice $n \times p$)
une matrice A de taille (n,p) se note donc

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,p} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

Pour $i \in [\![1,n]\!]$ et $j \in [\![1,p]\!]$, $a_{i,j}$ est un réel, placé à la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice.
Les réels $a_{i,j}$ sont appelés les **coefficients** de la matrice A
On peut noter la matrice A de façon plus synthétique :

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$$

Définitions et notations :
- une matrice qui a autant de lignes que de colonnes s'appelle une matrice **carrée**. Une matrice qui a n lignes et n colonnes est dite carrée **de taille** n
- une matrice qui n'a qu'une seule colonne est appelée **matrice-colonne**
- une matrice qui n'a qu'une seule ligne est appelée **matrice-ligne**
- on note $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de taille (n,p)
- l'ensemble des matrices carrées de taille n est noté $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

Exemples :

1. Pour dire que A est une matrice de taille (n,p), on écrira donc : $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,2}(\mathbb{R})$, $\quad \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 2 & 7 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{1,5}(\mathbb{R})$, $\quad \begin{pmatrix} 1 & 14 & -5 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

3. Ecrire les matrices $A = (i+j)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant 3 \\ 1 \leqslant j \leqslant 2}}$ et $B = \left((-1)^{i+j}\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant 2 \\ 1 \leqslant j \leqslant 4}}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Définition : deux matrices sont égales lorsqu'elles ont le même nombre de lignes, le même nombre de colonnes, et les mêmes coefficients, aux mêmes places. Autrement dit, pour $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ ayant même nombre de lignes n et même nombre de colonnes p, on a :

$$A = B \iff \forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], \quad a_{i,j} = b_{i,j}$$

2 Opérations sur les matrices

2.1 Addition

Définition : pour $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B = (b_{i,j}) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$,
on définit la matrice $A + B = (c_{i,j})$ de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ par :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \forall j \in [\![1,p]\!], \quad c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$$

Exemple : $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 11 & 0 \\ 3 & 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 10 & 2 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

Remarque : on ne peut pas additionner deux matrices qui n'ont pas la même taille.

Propriétés : pour A, B, C éléments de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

1) $A + B = B + A$ on dit que l'addition est **commutative** dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$
2) $A + (B + C) = (A + B) + C$ on dit que l'addition est **associative** dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$
3) on note $0_{n,p}$ et on appelle **matrice nulle**, la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à zéro. Alors $A + 0_{n,p} = A$

Remarques :

▷ pour $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, si on note $-A$ la matrice $(-a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$, alors $A + (-A) = 0_{n,p}$

▷ lorsqu'on additionne trois matrices A, B, et C, on peut écrire $A+B+C$ sans parenthèses (l'ordre n'a pas d'importance) ;

▷ $A + 0_{n,p} = 0_{n,p} + A = A$. La matrice nulle joue le même rôle que 0 pour l'addition des réels, ou que 1 pour la multiplication des réels. On parle d'**élément neutre**.

2.2 Produit d'une matrice par un nombre réel

Définition : pour $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, la matrice λA de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est obtenue en multipliant chaque coefficient de A par λ
autrement dit, si $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$, alors $\lambda A = (\lambda a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$

Exemples :

1. Pour $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $0A = 0_{n,p}$ et $1A = A$

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}$. Alors $2A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \\ -8 & 18 \end{pmatrix}$, $(-1)A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 0 \\ 4 & -9 \end{pmatrix}$, $0A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{3,2}$

3. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ alors $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 4 \\ 2 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

$3(A+B) = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 18 & 12 \\ 6 & -6 & 6 & -3 \end{pmatrix}$ $\quad 3A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 3 \\ 6 & -3 & 3 & -9 \end{pmatrix}$ $\quad 3B = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 15 & 9 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

et $3A + 3B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 18 & 12 \\ 3 & -6 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

Propriétés : soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et α, β des réels, alors :

$(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$ $\qquad$ $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$ $\qquad$ $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$

Remarque : ces règles nous permettent des calculs matriciels analogues à ceux avec les nombres, par exemple :

- pour $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $A - 4B$ désigne $A + (-4)B$
- la relation $M = -2A$ équivaut à $A = -\frac{1}{2}M$ car $-\frac{1}{2}M = -\frac{1}{2}(-2A) = \left(-\frac{1}{2}\times(-2)\right)A = A$
- soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

  pour calculer $-2A - 3B$, on peut calculer $(-2)A + (-3)B$, ou bien $M = 2A + 3B$, puis $-M$

2.3 Produit matriciel

2.3.1 Produit d'une matrice-ligne par une matrice-colonne

Définition :

soit $L = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

(i.e. $L \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ et $C \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$)

alors, le **produit** LC est le réel

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i}$$

soit $LC = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_ib_i + \ldots + a_nb_n$

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_i & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

Exemple :

calculer le produit LC avec

$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 12 \\ -1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

$LC = 1\times(-1) + 0\times 12 + (-3)\times(-1) + 1\times 4 + 2\times(-3) = 2$

et $CL = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & -1 & -2 \\ 12 & 0 & -36 & 12 & 24 \\ -1 & 0 & 3 & -1 & -2 \\ 4 & 0 & -12 & 4 & 8 \\ -3 & 0 & 9 & -3 & -6 \end{pmatrix}$ (cf. ci-dessous)

2.3.2 Produit de deux matrices

Comme l'illustre le produit d'une matrice ligne et d'une matrice colonne, on peut définir le produit $A \times B$ (noté AB) d'une matrice A par une matrice B dès que l'on peut multiplier les lignes de A par les colonnes de B, i.e. si **le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B**

Pour $A \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_{m,p}(\mathbb{R})$, on définit donc AB par la matrice $(c_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$:

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], \quad c_{i,j} = L_i(A)C_j(B)$$

où $L_i(A)$ désigne la $i^{\text{ème}}$ ligne de A, et $C_j(B)$ la $j^{\text{ème}}$ colonne de B

Définition : en notant $A = (a_{i,r})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant r\leqslant m}}$ et $B = (b_{s,j})_{\substack{1\leqslant s\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant p}}$

pour $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, $c_{i,j}$ est donc défini par la formule du produit matriciel :

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{m} a_{i,k}b_{k,j}$$

Illustration du produit

$\boxed{B : m \text{ lignes et } p \text{ colonnes}}$

$$\begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,j} & \dots & b_{1,p} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \dots & b_{2,j} & \dots & b_{2,p} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ b_{k,1} & b_{k,2} & \dots & b_{k,j} & \dots & b_{k,p} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ b_{m,1} & b_{m,2} & \dots & b_{m,j} & \dots & b_{m,p} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,k} & \dots & \dots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,k} & \dots & \dots & a_{2,m} \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,k} & \dots & \dots & a_{i,m} \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,k} & \dots & \dots & a_{n,m} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \dots & c_{1,j} & \dots & c_{1,p} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \dots & c_{2,j} & \dots & c_{2,p} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ c_{i,1} & c_{i,2} & \dots & c_{i,j} & \dots & c_{i,p} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ c_{n,1} & c_{n,2} & \dots & c_{n,j} & \dots & c_{n,p} \end{pmatrix}$$

$\boxed{A : n \text{ lignes et } m \text{ colonnes}}$ $\qquad$ $\boxed{C = A \times B : n \text{ lignes et } p \text{ colonnes}}$

Exemple : soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a & b \\ a & c \\ d & e \end{pmatrix}$

alors $AB = \begin{pmatrix} a+d & b+e \\ a-d & c-e \end{pmatrix}$ $\qquad$ et $BA = \begin{pmatrix} a & b & a-b \\ a & c & a-c \\ d & e & d-e \end{pmatrix}$

Remarque : lorsqu'il est possible de calculer AB, le produit BA n'est pas forcément défini.

⚠ Lorsque les produits AB et BA sont définis (A et $B \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R})$), en général, $AB \neq BA$

Propriétés : soit $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $C \in \mathscr{M}_{p,r}(\mathbb{R})$, alors

$$(AB)C = A(BC) \qquad A(B+C) = AB + AC \qquad (A+B)C = AC + BC$$

de plus avec $\lambda \in \mathbb{R}$, $\quad \lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$

Exemples :

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a. Calculer $AB, 2(AB)$ puis $2A$ et $(2A)B$

$AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $2(AB) = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 4 \\ -4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, $2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, $(2A)B = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 4 \\ -4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

On retrouve $2(AB) = (2A)B$ (on pourrait aussi vérifier $= A(2B)$)

b. Calculer $B + C$, et $A(B+C)$, puis AC et $AB + AC$

$T = B + C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $AT = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $AC = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $AB + AC = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

On retrouve comme prévu $A(B+C) = AB + AC$

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Calculer ABC de deux manières différentes.

On trouve $A(BC) = (AB)C$ qu'on écrit ABC

$$ABC = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Définition : on appelle **matrice identité d'ordre** n, et on note I_n la matrice carrée de taille n suivante :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Propriétés : soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, alors :

$$AI_p = A \quad \text{et} \quad I_n A = A$$

$$A \times 0_{p,q} = 0_{n,q} \text{ et } 0_{m,n} \times A = 0_{m,p}$$

Exemples : soit

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{pmatrix}$$

1. Calculer AI_2
2. Calculer $I_3 A$
3. Calculer BI_4
4. Calculer AB avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 82 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

⚠ $AB = (0)$ (matrice nulle) n'implique pas $A = (0)$ ou $B = (0)$

2.4 Transposition

Définition : soit $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, la **matrice transposée** de A est une matrice de $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, obtenue en « transposant » chaque ligne de la matrice A, elle est notée ${}^{t}A$

Plus précisément, pour $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, ${}^{t}A = (b_{k,l})_{\substack{1\leqslant k\leqslant p \\ 1\leqslant l\leqslant n}}$ avec :

$$\forall k \in [\![1, p]\!], \forall l \in [\![1, n]\!], \quad b_{k,l} = a_{l,k}$$

Remarque : la i$^{\text{ème}}$ ligne de A devient donc la i$^{\text{ème}}$ colonne de ${}^{t}A$

Exemples :

1. Soit $L = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, alors ${}^{t}L = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

2. Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix}$, alors ${}^{t}A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$

Propriétés : $\forall A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\quad {}^{t}({}^{t}A) = A \quad {}^{t}(A+B) = {}^{t}A + {}^{t}B \quad {}^{t}(\lambda A) = \lambda\, {}^{t}A$

pour $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$: $\boxed{{}^{t}(AB) = {}^{t}B\, {}^{t}A}$

Remarque : attention donc ${}^{t}(AB) \neq {}^{t}A\, {}^{t}B$. Le produit ${}^{t}A\, {}^{t}B$ n'est d'ailleurs pas forcément défini.

Exemples :

1. Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, alors $AB = \begin{pmatrix} a_1 - c_1 \\ a_2 - c_2 \end{pmatrix}$ et ${}^{t}(AB) = \begin{pmatrix} a_1 - c_1 & a_2 - c_2 \end{pmatrix}$

Calculer AB, puis écrire ${}^{t}(AB)$ et d'autre part ${}^{t}A$, ${}^{t}B$, puis ${}^{t}B\, {}^{t}A$: on trouve ${}^{t}B\, {}^{t}A = {}^{t}(AB)$

2. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(K)$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(K)$,

alors ${}^tXY = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ et $X{}^tY = \begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \dots & x_1y_n \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \dots & x_2y_n \\ \vdots & & & \vdots \\ x_iy_1 & x_iy_2 & \dots & x_iy_n \\ \vdots & & & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \dots & x_ny_n \end{pmatrix}$

3 Matrices carrées

3.1 Opérations sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

Pour A et B des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, la somme $A+B$ est aussi une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, les produits AB et BA sont définis et sont eux-mêmes éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. De plus ${}^tA \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ également et on rappelle que $AI_n = I_nA = A$

Définition : soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, les coefficients $a_{i,i}$ de A (pour $1 \leqslant i \leqslant n$) sont appelés les **coefficients diagonaux** de A

Définition : soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$
- par convention $A^0 = I_n$
- pour $p \in \mathbb{N}^*$, la **puissance $p^{\text{ème}}$ de** A est la matrice notée A^p de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$A^p = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{p \text{ fois}}$$

Propriétés : soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors :

$$A^pA^q = A^qA^p = A^{p+q} \quad \text{et} \quad (A^p)^q = (A^q)^p = A^{pq} \quad \text{et} \quad (\lambda A)^n = \lambda^n A^n$$

Remarques :

▷ On peut avoir $A^p = 0_{n,n}$ avec $A \neq 0_{n,n}$
Par exemple, calculer les puissances de la matrice
$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{3,3}$ et donc $\forall p \geqslant 3$, $A^p = 0_{3,3}$

▷ En général, $(AB)^p \neq A^pB^p$. Cela sera vrai lorsque A et B commutent, c'est-à-dire pour $AB = BA$. De la même façon, l'identité remarquable $(A+B)^2 = A^2+2AB+B^2$ (comme les autres) est fausse. De même pour le binôme de Newton.

Exemples : soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, calculer A^2, A^3, puis montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ puis par récurrence : pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n)$: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Initialisation : $P(0)$ est vraie $\Leftrightarrow A^0 = I_2$ ce qui est vrai donc $P(0)$ est vraie

Hérédité : pour $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $P(n)$ est vérifiée

alors $A^{n+1} = A \times A^n$ donc $A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ par hypothèse de récurrence, puis le calcul donne

$A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ i.e. $P(n+1)$ est vraie, donc par théorème de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

3.2 Matrices triangulaires

Définition : soit $T = (t_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on dit que T est

1. **triangulaire supérieure** lorsque pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $t_{i,j} = 0$ dès que $i > j$,
$$\text{i.e. } T = \begin{pmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} & \dots & t_{1,n-1} & t_{1,n} \\ 0 & t_{2,2} & \dots & t_{2,n-1} & t_{2,n} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & t_{n-1,n-1} & t_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & t_{n,n} \end{pmatrix}$$

2. **triangulaire inférieure** lorsque pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}n^2$, $t_{i,j} = 0$ dès que $i < j$,
$$\text{i.e } T = \begin{pmatrix} t_{1,1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ t_{2,1} & t_{2,2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & t_{n-1,n-1} & 0 \\ t_{n,1} & t_{n,2} & \dots & t_{n,n-1} & t_{n,n} \end{pmatrix}$$

Remarque : on peut résumer cela par « les coefficients au-dessous de la diagonale sont nuls » (triangulaire supérieure) et « les coefficients au-dessus de la diagonale sont nuls » (triangulaire inférieure)

Exemples :

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -7 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure.

2. $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ est triangulaire inférieure.

Propriétés : soit A, B des matrices triangulaires supérieures (respectivement triangulaires inférieures) et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors
λA, $A + B$, AB sont triangulaires supérieures (respectivement triangulaires inférieures).

3.3 Matrices diagonales

Définition : une matrice $D = (d_{i,j})$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **diagonale** lorsque tous ses coefficients sont nuls sauf éventuellement ses coefficients diagonaux,
autrement dit lorsque : pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $d_{i,j} = 0$ dès que $i \neq j$

Notation :
soit $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonale.
avec $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ des nombres réels, en écrivant usuellement la matrice, on obtient la forme ci-contre,
ce que l'on note parfois
$$D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Remarque : la matrice I_n est diagonale, ses coefficients diagonaux sont tous égaux à 1

Exemples : calculer AB avec

$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix}$ on trouve $AB = \begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2\mu_2 \end{pmatrix}$

Propriétés : soit $A = \mathrm{Diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$, $B = \mathrm{Diag}(b_1, b_2, \dots, b_n)$ deux matrices diagonales de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \lambda \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$, alors $\lambda A, A + B, AB$ et A^k sont diagonales et de plus

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda a_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & \lambda a_{n-1} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda a_n \end{pmatrix} \quad A + B = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_2 + b_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & a_{n-1} + b_{n-1} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_n + b_n \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} a_1b_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_2b_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & a_{n-1}b_{n-1} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_nb_n \end{pmatrix} \qquad A^k = \begin{pmatrix} a_1^k & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_2^k & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & a_{n-1}^k & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_n^k \end{pmatrix}$$

on peut le résumer en écrivant :

$$\lambda A = \mathrm{Diag}(\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n) \quad \text{et} \quad A + B = \mathrm{Diag}(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$$
$$AB = \mathrm{Diag}(a_1b_1, a_2b_2, \dots, a_nb_n) \quad \text{et} \quad A^k = \mathrm{Diag}(a_1^k, a_2^k, \dots, a_n^k)$$

Exemple : soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, alors pour $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$

3.4 Matrices symétriques

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, alors ${}^tA$ est également une matrice carrée de taille n

Définition : soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, A est dite **symétrique** lorsque ${}^tA = A$

Propriétés : soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$
A est symétrique si et seulement si : $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad a_{i,j} = a_{j,i}$

Exemple :

1. Montrer que la somme de deux matrices symétriques est symétrique.
   ${}^tA + B = {}^tA + {}^tB = A + B$ si A et B sont symétriques.
2. Le produit de deux matrices symétriques est-il toujours une matrice symétrique ?
   Avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, on trouve $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

3.5 Matrices inversibles

Définition : soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$
la matrice A est dite **inversible** lorsqu'il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AB = I_n$ ou $BA = I_n$

⚠ on ne peut inverser que des matrices carrées.

Propriétés et définition : soit A une matrice inversible de taille n, alors

1. la matrice B est unique.
2. on a en fait $AB = BA = I_n$
3. la matrice B s'appelle la **matrice inverse** de A, on la note A^{-1}

Exemples :

1. I_n est inversible, d'inverse I_n
2. On a vu que : $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), 0_{n,n}A = A\,0_{n,n} = 0_{n,n}$ donc la matrice nulle $0_{n,n}$ n'est pas inversible.

Propriétés : soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$
si A est inversible, alors A^{-1} l'est aussi, et $(A^{-1})^{-1} = A$

Exemples :

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ alors A est inversible ssi il existe $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $AM = I_2$

i.e. ssi il existe a, b, c, d réels tels que $\begin{cases} 2a + c = 1 \\ 2b + d = 0 \\ a + c = 0 \\ b + d = 1 \end{cases}$

ce qui équivaut à $a = 1, b = -1, c = -1, d = 2$, donc A est inversible, et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ alors A est inversible ssi il existe $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $AM = I_2$

i.e. ssi il existe a, b, c, d réels tels que $\begin{cases} 2a + 2c = 1 \\ 2b + 2d = 0 \\ a + c = 0 \\ b + d = 1 \end{cases}$

ce qui implique $b + d = 0 = 1$ ce qui est faux donc A n'est pas inversible

Propriété - matrice diagonale inversible
une matrice D diagonale est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls ; autrement dit, $D = \mathrm{Diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ est inversible si et seulement si :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad d_i \neq 0$$

de plus si $D = \mathrm{Diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ est inversible, alors $D^{-1} = \mathrm{Diag}\left(\frac{1}{d_1}, \frac{1}{d_2}, \ldots, \frac{1}{d_n}\right)$

Exemple : soit $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, alors A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Propriétés :

1. soit $A, B, C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, si A est inversible, alors :
- si $AB = AC$, alors $B = C$; on dit que A est **simplifiable à gauche**
- si $BA = CA$, alors $B = C$; on dit que A est **simplifiable à droite**

2. soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, si A et B sont inversibles, alors AB est inversible, et :

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Démonstration :

1. En effet, en supposant $AB = AC$, on peut effectuer le produit par A^{-1} à gauche alors $A^{-1}AB = A^{-1}AC$ i.e. $I_nB = I_nC$, soit $B = C$
on procède de même pour la simplification à droite.

2. En supposant A et B inversibles et en notant $M = B^{-1}A^{-1}$, alors $M(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}B = I_n$

Propriétés - inverse de la transposée :
soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, si A est inversible, alors ${}^{t}A$ est inversible et

$$({}^{t}A)^{-1} = {}^{t}(A^{-1})$$

Démonstration : il suffit de transposer $AA^{-1} = I_n$ pour s'en convaincre.
${}^{t}(AA^{-1}) = {}^{t}I_n = I_n$ or ${}^{t}(AA^{-1}) = {}^{t}(A^{-1}){}^{t}A$ donc ${}^{t}(A^{-1}){}^{t}A = I_n$ d'où le résultat

Définition et Propriétés - **caractérisation d'une matrice 2×2 inversible**

soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on appelle **déterminant de** A le nombre réel $ad - bc$, noté $\det A$

1. A est inversible si et seulement si : $\det A \neq 0$ (i.e. $ad - bc \neq 0$)
2. si A est inversible (i.e. $\det A \neq 0$), alors

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Démonstration :

soit $M = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, alors $AM = \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = (ad - bc)I_2$

1. si $ad - bc \neq 0$, si on note $B = \dfrac{1}{ad - bc}M$, on a $AB = I_2$, donc A est inversible, et $A^{-1} = B$
2. supposons $ad - bc = 0$, on a donc $AM = 0I_2 = 0_{2,2}$
   On va procéder par l'absurde : supposons que A est inversible, alors en multipliant à gauche la relation par A^{-1}, on obtient $M = 0_{2,2}$, ce qui donne $a = b = c = d = 0$, puis $A = 0_{2,2}$, c'est contradictoire avec l'hypothèse selon laquelle A est inversible.
   Donc notre hypothèse « A est inversible » est fausse.
   Finalement, si $ad - bc = 0$ alors A n'est pas inversible, ce qui, par contraposition, donne : si A est inversible, alors $ad - bc \neq 0$

Exemple :

Soit $A = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}

$\det A = (-4) \times 3 - (-2) \times 5 = -2$ donc A est inversible et $A^{-1} = -\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$

Un problème classique

Cf. exercices **16** et **21**, on s'intéresse à plusieurs suites définies de manière récursive et « croisée », par exemple $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + v_n \end{cases}$ $\begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = 2u_n \end{cases}$ et pour $n \in \mathbb{N}$ on note $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$

Questions - type	Méthode
Déterminer A tel que $X_{n+1} = AX_n$	on fait (au brouillon) le produit $A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ $(+\ w_n \dots)$
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0$	démonstration par récurrence type « formule explicite d'une suite géométrique »
Déterminer P^{-1}	1) si $P \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on utilise la propriété plus haut 2) on utilise une relation par exemple entre A^2, A et I_n 3) on utilise un système (cf. chapitre sur les systèmes)
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PD^nP^{-1}$	par récurrence en utilisant : $PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^nI_nDP^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$
Calculer D^n pour tout entier n	propriété sur les matrices diagonales
En déduire A^n pour tout entier n	par le calcul : produit matriciel PD^nP^{-1}
En déduire u_n et v_n pour tout entier n	par le calcul : produit matriciel $A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$