

Plan de travail

Notion	Exercices a minima	Mais aussi
Ecriture et calculs matriciels	1 à 7, 9	8
Inversibilité d'une matrice	12, 13	14
Exercices ou problèmes type	15, 16, 21	20
Exercices plus abstraits	17, 18	10, 11, 19

Calcul matriciel

Exercice 1

1. Ecrire la matrice $A = (ij)_{\substack{1 \leq i \leq 5 \\ 1 \leq j \leq 4}}$
2. Ecrire la matrice $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq 4 \\ 1 \leq j \leq 4}}$, avec $b_{i,j} = \min(i, j)$ (le minimum entre i et j).

Exercice 2

Soit : $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$

Calculer $A + B$, $2A - B$, AB , BA , ${}^t(AB)$ et ${}^tB{}^tA$ (vérifier l'égalité).

Exercice 3

Calculer les produits LC et CL où $L = (-1 \ 0 \ 2)$ et $C = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Exercice 4

Soit : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Calculer $A+B$, $A-B$, A^2-B^2 , $(A+B)(A-B)$. Que constate-t-on ?
2. Calculer $(A+B)^2$ et $A^2+2AB+B^2$. Que constate-t-on ?

Exercice 5

Soit n un entier tel que $n \geq 2$. Soient A, B, C trois matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Développer les expressions matricielles suivantes :

1. $A(B+C) =$
2. $(B+C)A =$
3. $(A+B)^2 =$
4. $(A+B)^3 =$
5. $A(A^2+2A+B+I_n) =$

Exercice 6

Soit n un entier tel que $n \geq 2$. Soient A, M deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Factoriser les expressions matricielles suivantes :

1. $M^2 + 3M + MA =$
2. $AM - 2M =$
3. $M^3 - 3M^2 + 2M =$
4. $M^2 - 2M =$

Exercice 7

Soit a, b et c des réels,

on pose $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{pmatrix}$

Exercice 8

Soit $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, soit a un réel et $M = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 + \frac{a^2}{2} & \frac{a^2}{2} \\ -a & -\frac{a^2}{2} & 1 - \frac{a^2}{2} \end{pmatrix}$

1. Calculer U^2
2. Exprimer M à l'aide des matrices I_3 , U et U^2

Exercice 9

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^2 et A^3
2. Donner, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, l'expression de A^p en fonction de p
3. Soit n un entier tel que $n \geq 2$
Soit $J = (a_{k,l})_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq l \leq n}}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $a_{k,l} = 1$ pour tous k et l éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$
 - a. Montrer que $J^2 = nJ$
 - b. Exprimer J^p à l'aide de J pour tout $p \in \mathbb{N}^*$

Exercice 10

Soit φ l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vers $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \varphi(A) = A + {}^t A$$

1. Montrer que pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\varphi(A)$ est symétrique.
2. Montrer que pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :
$$\varphi(M + N) = \varphi(M) + \varphi(N), \quad \text{et} \quad \varphi(\lambda M) = \lambda \varphi(M)$$
3. Montrer que $\varphi \circ \varphi = 2\varphi$

Exercice 11

Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$

On note E l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ vérifiant : $AM = BM$

1. On suppose que $M_1 \in E$ et que $M_2 \in E$. Montrer que $M_1 + M_2 \in E$
2. On suppose que $N \in E$, et que λ est un nombre réel. Vérifier que $\lambda N \in E$

Matrices inversibles

Exercice 12

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^2 et A^3
2. A est-elle inversible ?
3. Déterminer A^n pour n un entier tel que $n \geq 3$

Exercice 13

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

1. Calculer A^2 puis A^3
2. En déduire que A n'est pas inversible.
3. Calculer $(I_3 - A)(I_3 + A + A^2)$
En déduire que $I_3 - A$ est inversible, et déterminer son inverse.

Exercice 14

Soit n un entier tel que $n \geq 2$

Soit P une matrice carrée de taille n telle que $P^2 = P$

Soit Q la matrice : $Q = I_n - P$

1. Montrer que si P est inversible, alors $P = I_n$
2. Montrer que si $P - I_n$ est inversible, alors P est la matrice nulle.
3. Montrer que $Q^2 = Q$
4. Montrer que $PQ + QP = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$

Exercice 15

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

1. Exprimer A^2 à l'aide de A et de I_3
2. En déduire que A est inversible, et déterminer A^{-1}
3. Montrer par récurrence qu'il existe deux suites réelles $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies de manière unique, telles que :
 $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = a_n A + b_n I_3$
4. Montrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2
5. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, l'expression de a_n en fonction de n , puis celle de b_n
6. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, l'expression de A^n en fonction de n

Exercice 16

Soit A et P les matrices : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que la matrice P est inversible, et calculer P^{-1}
2. On note D la matrice : $D = P^{-1}AP$
 - a. Calculer D
 - b. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PD^nP^{-1}$
 - c. Calculer D^n pour tout entier n
 - d. En déduire A^n pour tout entier n
3. Soient u et v les suites réelles définies par :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + v_n \end{cases} \text{ et } \begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = 2u_n \end{cases}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$

a. Déterminer X_0

b. Pour n entier, donner une relation entre X_{n+1} et X_n

c. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0$

d. Pour $n \in \mathbb{N}$, donner l'expression de u_n et v_n en fonction de n

Exercice 17

Soit E l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de la forme $\begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{pmatrix}$
où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{pmatrix} \in E$
 - a. Montrer que $A = aM_1 + bM_2$, où M_1 et M_2 sont des matrices de E à déterminer.
 - b. Montrer que : $A = 0_{2,2} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$
 - c. Donner une condition nécessaire sur les réels a et b pour que A soit inversible.
2. Montrer que si $M \in E$ et $N \in E$, alors $M + N \in E$
3. Montrer que si $M \in E$ et $N \in E$, alors $MN \in E$

Exercice 18

Soit A une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Déterminer toutes les matrices B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant : $A^{-1}BA = 0_{n,n}$

Exercices plus difficiles

Exercice 19

Soit n un entier tel que $n \geq 2$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

On note s la somme de tous les coefficients de la matrice A .

À l'aide de la formule du produit matriciel, montrer que :

$$JAJ = sJ$$

Exercice 20

Soit P le polynôme défini par : $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = x^2 - 3x + 2$

et A la matrice carrée de taille 3 suivante : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

- lorsque T est un polynôme défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, T(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

$T(A)$ désigne la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$: $a_0I_3 + a_1A + a_2A^2 + \dots + a_nA^n$

- lorsque T et V sont des polynômes, et $R = T + V$

alors $R(A) = T(A) + V(A)$

- lorsque T et V sont des polynômes, et $R = TV$

alors $R(A) = T(A)V(A)$

1. Déterminer les racines de P

2. Soit n un entier tel que $n \geq 2$. On admet qu'il existe Q un polynôme, et $R \in \mathbb{R}_1[X]$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^n = P(x)Q(x) + R(x)$$

Grâce à la question précédente, déterminer les coefficients du polynôme R

3. Vérifier que $P(A) = 0_{3,3}$

4. Soit n un entier tel que $n \geq 2$. Grâce à la question 2, montrer que

$$A^n = \begin{pmatrix} 2 - 2^n & 2^n - 1 & 1 - 2^n \\ 3(1 - 2^n) & 3 \times 2^n - 2 & 3(1 - 2^n) \\ 1 - 2^n & 2^n - 1 & 2 - 2^n \end{pmatrix}$$

Exercice 21 - Problème-type

Cet exercice est un extrait d'un D.S. d'année antérieure.

On considère deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par :

$$u_0 = 0, \quad v_0 = 1, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = -2u_n + v_n \\ v_{n+1} = 3u_n \end{cases}$$

1. a. Déterminer une matrice carrée A de taille 2 telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$

- b. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. On note $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

- a. Justifier que Q est inversible puis déterminer Q^{-1}

- b. Déterminer la matrice D telle que $D = Q^{-1}AQ$

- c. Montrer que pour tout entier naturel n , on a : $A^n = QD^nQ^{-1}$

- d. En déduire que pour tout entier naturel n :

$$A^n = \frac{-1}{4} \begin{pmatrix} -1 + (-3)^{n+1} & -1 + (-3)^n \\ -3 - (-3)^{n+1} & -3 - (-3)^n \end{pmatrix}$$

- e. Déterminer les valeurs de u_n et v_n en fonction de n

- f. Étudier les limites des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Ce schéma-type peut être complété par une partie en probabilités (cf. D.S. de fin d'année) et par de nouvelles questions en deuxième année (par exemple, vous pourrez trouver les matrices Q et/ou D vous-mêmes).