Corrigé *Total sur 57 points*

Exercice 1 - vrai ou faux *0,5 point par question - total : 5 points*

Indiquer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.
Pour cet exercice (seulement), vous n'avez pas besoin de justifier. Les mauvaises réponses ne sont pas pénalisées.

a) $\ln(3) + \ln(9) = 3\ln(3)$

C'est vrai puisque $\ln(9) = \ln(3^2) = 2\ln(3)$ donc $\ln(3) + \ln(9) = \ln(3) + 2\ln(3) = 3\ln(3)$

b) $x \mapsto \sqrt{x+7}$ est définie sur $[-7; +\infty[$

C'est vrai puisque une racine carrée est définie dès lors que son contenu est positif, i.e. ici $x + 7 \geqslant 0$, soit $x \geqslant -7$

c) $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est bijective de $]0; +\infty[$ dans $]0; +\infty[$

C'est vrai puisque pour $y \in]0; +\infty[, y = \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{y}$ (y a un unique antécédent qui appartient bien à $]0; +\infty[$)
ce que l'on observe graphiquement avec la courbe de la fonction inverse.

d) la fonction exponentielle est la réciproque de la fonction logarithme népérien

C'est vrai (cf. cours), on peut le justifier en vérifiant que $\forall x \in \mathbb{R}, \ln(e^x) = x$ et que $\forall x \in]0; +\infty[, e^{ln(x)} = x$

e) une fonction surjective est injective

C'est faux (ce sont deux notions (différentes). Par exemple la fonction f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = x^2$ est surjective, mais elle n'est pas injective car $f(-1) = f(1)$

f) une suite géométrique est toujours convergente

C'est faux : cf. le contre-exemple habituel : $u_n = (-1)^n$ ou encore $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers $+\infty$

g) une suite décroissante et majorée est convergente

C'est faux, on peut s'en convaincre avec la suite définie par $u_n = -n$ qui est décroissante (facile à démontrer) et majorée par 0 puisque tous ses termes sont négatifs.

h) la suite définie pour tout entier n par $u_n = \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$ diverge

C'est faux il s'agit d'une suite géométrique dont la raison est strictement comprise entre -1 et 1 (q^n avec $q = -\dfrac{1}{3}$ donc $|q| < 1$)

i) si $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$ et si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge

C'est faux, il faut de plus que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aient la même limite, on peut s'en convaincre avec les suites définies ppour tout n par $v_n = -1, u_n = (-1)^n$ et $w_n = 1$
l'inégalité est bien vérifiée, $v_n \to 1$ et $w_w \to 1$ mais $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas.

j) pour tous événements A et $B, P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$

C'est vrai par définition de la probabilité conditionnelle (cf. cours, rigoureusement il faut également $P(A) \neq 0$).

Exercice 2 *17 points*

A la maison du don de Brest, 200 personnes viennent quotidiennement effectuer un don de sang.
Il existe trois types de don : don de sang total, don de plasma et don de plaquettes.
Un examen préalable au don est effectué par un médecin, qui détermine la possibilité de donner ou non.

La répartition quotidienne des candidats au don est la suivante :
- 120 personnes viennent faire un don de sang total et parmi elles, en moyenne, 4% ne peuvent pas effectuer le don ;
- 50 personnes viennent faire un don de plasma et parmi elles, en moyenne, 1% ne peuvent pas effectuer le don ;
- 30 personnes viennent faire un don de plaquettes et parmi elles, en moyenne, 2% ne peuvent pas effectuer le don.

On se propose de noter les événements de la façon suivante :
- D_1 : « une personne vient faire un don de sang total » ;
- D_2 : « une personne vient faire un don de plasma » ;
- D_3 : « une personne vient faire un don de plaquettes » ;
- V : « la personne candidate au don peut effectuer le don ».

1. Au cours d'une journée, on choisit, au hasard, un candidat au don.

a. Quelle est la probabilité que ce candidat ait pu effectuer le don ? *2 points*

Un candidat a pu effectuer un don de sang total, de plasma ou de plaquettes. Plus précisément, les événements D_1, D_2, D_3 forment un système complet d'événements, donc d'après la formule des probabilités totales :
$P(V) = P(V \cap D_1) + P(V \cap D_2) + P(V \cap D_3) = P(D_1)P_{D_1}(V) + P(D_2)P_{D_2}(V) + P(D_3)P_{D_3}(V)$
or d'après l'énoncé $P(D_1) = \dfrac{120}{200} = \dfrac{3}{5}$, $P(D_2) = \dfrac{50}{200} = \dfrac{1}{4}$ et $P(D_3) = \dfrac{30}{200} = \dfrac{3}{20}$
$P_{D_1}(V) = \dfrac{96}{100}$, $P_{D_2}(V) = \dfrac{99}{100}$ et $P_{D_3}(V) = \dfrac{98}{100}$

donc $P(V) = \dfrac{3}{5} \times \dfrac{96}{100} + \dfrac{1}{4} \times \dfrac{99}{100} + \dfrac{3}{20} \times \dfrac{98}{100} = \dfrac{12}{20} \times \dfrac{96}{100} + \dfrac{5}{20} \times \dfrac{99}{100} + \dfrac{3}{20} \times \dfrac{98}{100}$

$= \dfrac{12 \times 96 + 5 \times 99 + 3 \times 98}{20 \times 100} = \dfrac{1\,152 + 495 + 294}{2\,000} = \dfrac{1\,941}{2\,000} = 97,05\%$

Nota bene : on peut aussi commencer par déterminer $P(\overline{V})$ (calcul plus facile) pour en déduire $P(V)$

b. Un candidat n'a pas pu effectuer le don ; calculer la probabilité qu'il s'agissait d'un don de plasma. *1,5 points*

La formule de Bayes nous permet d'écrire :
$P_{\overline{V}}(D_2) = \dfrac{P(D_2)P_{D_2}(\overline{V})}{P(\overline{V})} = \dfrac{\frac{1}{4} \times \frac{1}{100}}{\frac{59}{2\,000}} = \dfrac{\frac{1}{400}}{\frac{59}{2\,000}} = \dfrac{1}{400} \times \dfrac{2\,000}{59} = \dfrac{5 \times 400}{400 \times 59} = \dfrac{5}{59}$

on a utilisé $P(\overline{V}) = 1 - P(V)$ soit $P(\overline{V}) = 1 - \dfrac{1\,941}{2\,000} = \dfrac{59}{2\,000}$ d'après **a.**

c. Les événements D_3 et V sont-ils indépendants ? *1 point*

Non car concrètement, il semble que le fait d'effectuer le don dépende du type de don.
Mathématiquement, on peut remarquer que $P(V) = \dfrac{1\,941}{2\,000}$ et $P_{D_3}(V) = \dfrac{98}{100} = \dfrac{98 \times 20}{2\,000} = \dfrac{1\,960}{2\,000}$, donc $P(V) \neq P_{D_3}(V)$ ce qui signifie que D_3 et V sont dépendants.

2. On suppose que tous ces candidats reviennent faire un deuxième don et que, de manière indépendante au premier, 2% d'entre eux ne peuvent pas effectuer le deuxième don.
Pour un candidat au don pris au hasard, calculer les probabilités des événements suivants :

a. Les 2 deux dons ont été effectués. *1 point*

En notant V_1 et V_2 les événements respectifs : « le premier don (resp. le deuxième) a été effectué », alors on s'intéresse ici à $V_1 \cap V_2$
donc par indépendance (d'après l'énoncé), $P(V_1 \cap V_2) = P(V_1)P(V_2)$
or $P(V_1) = P(V) = \dfrac{1\,941}{2\,000}$ et $P(V_2) = \dfrac{98}{100} = \dfrac{49}{50}$ donc $P(V_1 \cap V_2) = \dfrac{1\,941}{2\,000} \times \dfrac{49}{50} = \dfrac{95\,109}{100\,000}$

b. Au moins un don a été effectué. *1 point*

On s'intéresse à l'événement contraire « aucun don n'a été effectué » ce qui correspond à $\overline{V_1} \cap \overline{V_2}$ et de manière analogue à la question précédente, par indépendance,
$P(\overline{V_1} \cap \overline{V_2}) = P(\overline{V_1})P(\overline{V_2}) = \dfrac{59}{2\,000} \times \dfrac{1}{50} = \dfrac{59}{100\,000}$

et donc en notant A l'événement qui nous intéresse, $P(A) = 1 - P(\overline{V_1} \cap \overline{V_2}) = \dfrac{99\,941}{100\,000}$

Nota bene : on peut voir qu'il s'agit de $P(V_1 \cup V_2)$ et utiliser la formule de Poincaré.

c. Un don n'a pas été effectué. *1 point*

Les événéments « les deux dons ont été effectués », « un seul don a été effectué » et « aucun don n'a été effectué » forment un système complet d'événements donc la somme de leurs probabilités vaut 1.
Donc en écrivant B l'événement « un seul donc a été effectué », et avec les notations précédentes,
on trouve $P(V_1 \cap V_2) + P(\overline{A}) + P(B) = 1$ soit $P(B) = 1 - P(V_1 \cap V_2) - P(\overline{A})$

donc $P(B) = 1 - \dfrac{95\,109}{100\,000} - \dfrac{59}{100\,000}$ d'après les valeurs trouvées plus haut

$= 1 - \dfrac{95\,168}{100\,000} = \dfrac{4\,832}{100\,000} = \dfrac{1\,208}{25\,000} = \dfrac{603}{12\,500}$

on peut se contenter de $P(B) = 4,832\%$ (ce qui est plus lisible)

3. Le tableau ci-dessous présente le nombre de dons qui n'ont pas pu être effectués chaque jour au cours du mois de novembre :

Jour	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Dons non effectués	3	5	3	2	4	1	1	2	2	3	4	1	2	1	2

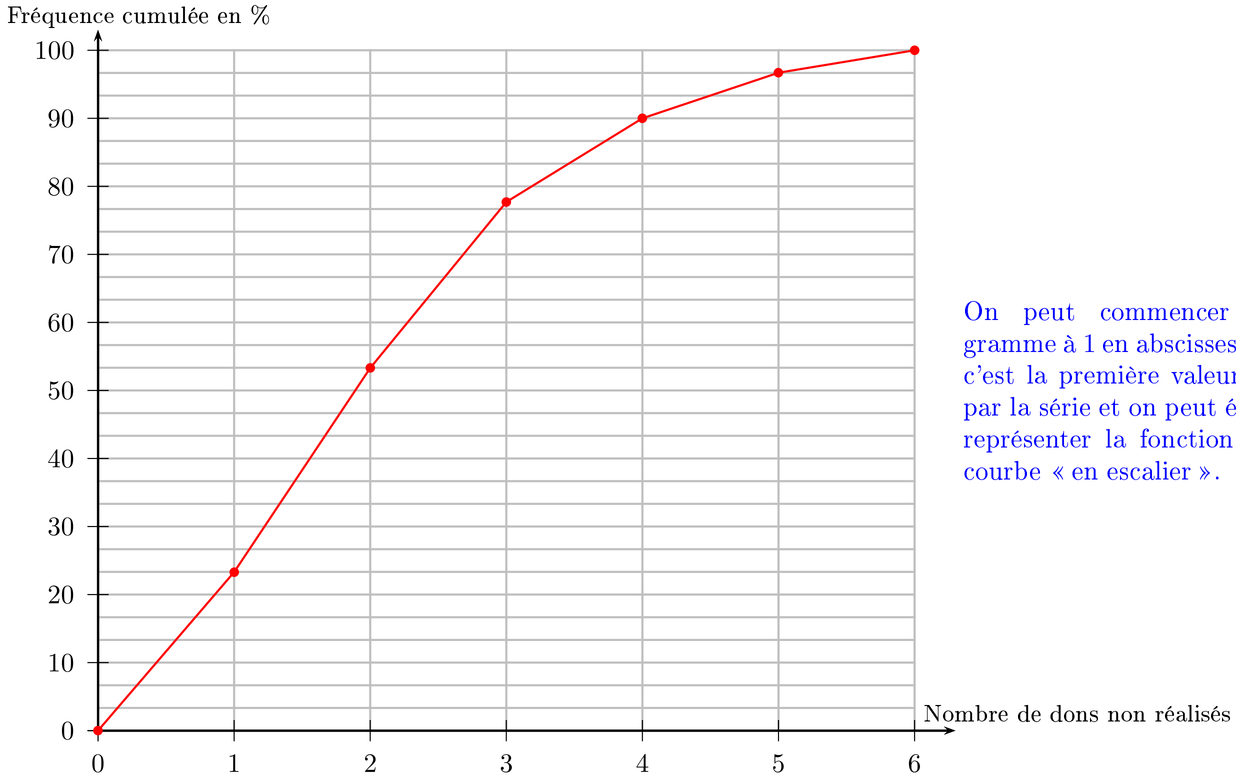
Jour	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Dons non effectués	6	1	2	3	3	4	2	5	1	4	3	2	2	1	3

a. Résumer dans un tableau les effectifs, les fréquences et les fréquences cumulées des différentes valeurs de la série statistique. *1,5 points*

Les valeurs prises par la série statistique sont $[\![1,6]\!]$ et plus précisément :

Valeurs	1	2	3	4	5	6
Effectifs	7	9	7	4	2	1
Fréquences	$\frac{7}{30}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{30}$
Fréquences cumulées	$\frac{7}{30}$	$\frac{16}{30}$	$\frac{23}{30}$	$\frac{27}{30}$	$\frac{29}{30}$	1

b. Représenter le diagramme des fréquences cumulées de cette série statistique. *1,5 points*



On peut commencer le diagramme à 1 en abscisses (puisque c'est la première valeur atteinte par la série et on peut également représenter la fonction par une courbe « en escalier ».

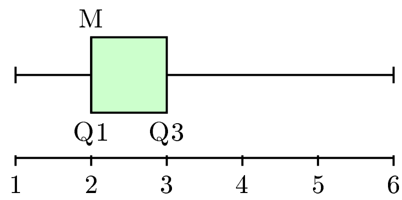
c. Déterminer l'étendue, les premier et troisième quartiles ainsi que la médiane de cette série statistique. *1,5 points*

Comme évoqué plus haut, l'étendue est $[1, 6]$ (ou $[\![1,6]\!]$)
Comme il y a 30 valeurs, le quart des valeurs vaut $\frac{30}{4} = 7,5$ donc le premier quartile est la huitème valeur : $Q_1 = 2$ et de même Q_3 est la 23$^{\text{ème}}$ valeur, $Q_3 = 3$; et enfin
comme il y a un nombre pair de valeurs, la médiane m vaut la moyenne des 15$^{\text{ème}}$ et 16$^{\text{ème}}$ valeurs $m = \frac{2+2}{2} = 2$

d. Représenter le diagramme en boîte de cette série statistique. *1 point*

Avec les informations précécentes, on peut représenter la boîte à moustache. La série est tellement peu dispersée que le deuxième quart des valeurs n'est pas visible.

Diagramme en boîte des valeurs



e. Déterminer la moyenne de cette série statistique. *1 point*

Par définition, $\bar{x} = \dfrac{7\times 1 + 9\times 2 + 7\times 3 + 4\times 4 + 2\times 5 + 6}{30} = \dfrac{78}{30} = \dfrac{26}{10} = 2,6$

f. Déterminer une valeur approchée de la variance. *1,5 points*

D'après la formule de Kœnig-Huygens, la variance vaut $s_x^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$
or $\bar{x} = 2,6$ donc $\bar{x}^2 = 2,6^2 = 6,76$ pour la moyenne, et par définition
$\bar{x^2} = \dfrac{7\times 1^2 + 9\times 2^2 + 7\times 3^2 + 4\times 4^2 + 2\times 5^2 + 6^2}{30} = \dfrac{7+36+63+64+50+36}{30} = \dfrac{256}{30} \simeq 8,53$
d'où $s_x^2 \simeq 8,53 - 6,76$ i.e. $s_x^2 \simeq 1,77$ (ce qui donnerait un écart-type d'environ $1,33$, ce qui semble cohérent).

4. Avec Python, en supposant qu'on dispose d'une série statistique (dont on ne connait pas la longueur), et dont les valeurs sont contenues dans un liste `L` (définie dans Python).

Ecrire un programme Python qui calcule la moyenne de la série statistique. *1,5 points*

On additionne de manière itérative les termes de la liste et au passage on calcule l'effectif total (ce que l'on peut aussi obtenir avec la longueur de la liste : `len(L)`) :

```
somme=0
population=0
for i in range(0,len(L)) :
    somme=somme+L[i]
    population=population+1
moyenne=somme/population
print("la moyenne vaut", moyenne)
```

Exercice 3 - calcul de limites *4,5 points*

Déterminer les limites des suites définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

1. $u_n = \dfrac{4^n + 7^n}{6^n + (-1)^n}$ *1,5 points*

Comme d'habitude, on factorise par les termes prépondérants qui sont ici 7^n au numérateur et 6^n au dénominateur
donc $u_n = \dfrac{7^n\left(\frac{4^n}{7^n}+1\right)}{6^n\left(1+\frac{(-1)^n}{6^n}\right)} = \dfrac{7^n}{6^n} \times \dfrac{\left(\frac{4}{7}\right)^n + 1}{1 + \left(-\frac{1}{6}\right)^n} = \left(\dfrac{7}{6}\right)^n \times \dfrac{\left(\frac{4}{7}\right)^n + 1}{1 + \left(-\frac{1}{6}\right)^n}$
or $\left(\dfrac{4}{7}\right)^n \to 0$ et $\left(-\dfrac{1}{6}\right)^n \to 0$ (forme q^n avec $|q|<1$) et $\left(\dfrac{7}{6}\right)^n \to +\infty$ (forme q^n avec $q>1$)
donc par opérations $u_n \to +\infty$ (pour résumer : « $u_n \to +\infty \times \dfrac{1+0}{1+0}$ »)

2. $w_n = \dfrac{e^{-n} - (\ln(n))^3 + n^{-4}}{(\ln(n))^4 - n^2 + 1}$ *1,5 points*

De même, on factorise par les termes prépondérants qui sont ici $-(\ln(n))^3$ au numérateur et $-n^2$ au dénominateur
donc $w_n = \dfrac{-(\ln(n))^3\left(\frac{e^{-n}}{-(\ln(n))^3} + 1 + \frac{n^{-4}}{-(\ln(n))^3}\right)}{-n^2\left(\frac{(\ln(n))^4}{-n^2} + 1 + \frac{1}{-n^2}\right)} = \dfrac{(\ln(n))^3}{n^2} \times \dfrac{1 - \frac{e^{-n}}{(\ln(n))^3} - \frac{n^{-4}}{(\ln(n))^3}}{1 - \frac{(\ln(n))^4}{n^2} - \frac{1}{n^2}}$
or d'après les limites usuelles (et parfois inversion) $e^{-n} = \dfrac{1}{e^n} \to 0$ $\quad n^{-4} = \dfrac{1}{n^4} \to 0$ $\quad (\ln(n))^3 \to +\infty$ et $\dfrac{1}{n^2} \to 0$
donc par opérations $\dfrac{e^{-n}}{(\ln(n))^3} \to 0$ et $\dfrac{n^{-4}}{(\ln(n))^3} \to 0$, de plus par croissances comparées $\dfrac{(\ln(n))^3}{n^2} \to 0$ et $\dfrac{(\ln(n))^4}{n^2} \to 0$
donc par opérations $w_n \to 0$ (pour résumer : « $w_n \to 0 \times \dfrac{1-0-0}{1-0-0}$ »)

3. $v_n = \sqrt{3n+2} - \sqrt{3n-1}$ *1,5 points*

On utilise la méthode du conjugué :
$v_n = \sqrt{3n+2} - \sqrt{3n-1} = \dfrac{(\sqrt{3n+2}-\sqrt{3n-1})(\sqrt{3n+2}+\sqrt{3n-1})}{\sqrt{3n+2}+\sqrt{3n-1}} = \dfrac{\sqrt{3n+2}^2 - \sqrt{3n-1}^2}{\sqrt{3n+2}+\sqrt{3n-1}} = \dfrac{3n+2-(3n-1)}{\sqrt{3n+2}+\sqrt{3n-1}}$
$= \dfrac{3}{\sqrt{3n+2}+\sqrt{3n-1}}$ et $\sqrt{3n+2}+\sqrt{3n-1} \geqslant \sqrt{3n+2} \geqslant \sqrt{3n} \geqslant \sqrt{n}$ donc $\sqrt{3n+2}+\sqrt{3n-1} \to +\infty$
et de fait par quotient $\dfrac{3}{\sqrt{3n+2}+\sqrt{3n-1}} \to 0$ i.e. $v_n \to 0$

Exercice 4 *12 points*

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = -\dfrac{1}{5}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n + \dfrac{1}{3^n}$

1. Calculer u_1 et u_2 *0,5 point*

Par définition, $u_1 = 2u_0 + \dfrac{1}{3^0} = -\dfrac{2}{5} + 1 = -\dfrac{2}{5} + \dfrac{5}{5} = \dfrac{3}{5}$

et $u_2 = 2u_1 + \dfrac{1}{3^1} = 2 \times \dfrac{3}{5} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{6}{5} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{18}{15} + \dfrac{5}{15} = \dfrac{23}{15}$

2. Montrer : $\forall n \geqslant 1, u_n \geqslant 2^{n-2}$ *1,5 points*

On procède par récurrence, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $P(n) : u_n \geqslant 2^{n-2}$

Initialisation : $P(1)$ est vraie $\Leftrightarrow u_1 \geqslant 2^{1-2} \Leftrightarrow u_1 \geqslant 2^{-1} \Leftrightarrow u_1 \geqslant \dfrac{1}{2}$

ce qui est vrai d'après la première question ($u_1 = \dfrac{3}{5}$) donc $P(1)$ est vraie

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que $P(n)$ est vraie

par hypothèse $u_n \geqslant 2^{n-2}$ donc $2u_n \geqslant 2 \times 2^{n-2}$ i.e. $2u_n \geqslant 2^{n-1}$ et $\dfrac{1}{3^n} \geqslant 0$

donc a fortiori $2u_n + \dfrac{1}{3^n} \geqslant 2^{n-1}$ i.e. $u_{n+1} \geqslant 2^{n-1}$ donc $P(n+1)$ est vraie, d'où l'hérédité

donc par théorème de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ est vraie, i.e.$u_n \geqslant 2^{n-2}$

3. Déterminer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *1 point*

On peut écrire $2^{n-2} = 2^n \times 2^{-2} = \dfrac{2^n}{2^2} = \dfrac{2^n}{4}$

comme $2^n \to +\infty$ (forme q^n avec $q > 1$) alors par opération $\dfrac{2^n}{4} \to +\infty$

et donc par théorème des gendarme (version infinie) $u_n \to +\infty$

Nota bene : l'inégalité de la question précédente n'est valable que pour $n \geqslant 1$, mais le théorème des gendarmes peut s'appliquer avec des inégalités qui ne sont valables qu'à partir d'un certain rang.

4. Utilisation d'une suite auxiliaire. On pose pour tout $n \in \mathbb{N} : v_n = \dfrac{u_n}{2^n}$

a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{2 \times 6^n}$ *1 point*

Soit $n \in \mathbb{N}$, par définition de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}, v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_{n+1}}{2^{n+1}} - \dfrac{u_n}{2^n} = \dfrac{u_{n+1}}{2^{n+1}} - \dfrac{2u_n}{2^{n+1}} = \dfrac{u_{n+1} - 2u_n}{2^{n+1}}$

or par définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, u_{n+1} - 2u_n = \dfrac{1}{3^n}$, donc $v_{n+1} - v_n = \dfrac{\frac{1}{3^n}}{2^{n+1}} = \dfrac{1}{3^n \times 2^n \times 2} = \dfrac{1}{6^n \times 2}$

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{6^i}$ et $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}(v_{i+1} - v_i)$ *1,5 points*

$\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{6^i} = \frac{1 - \left(\frac{1}{6}\right)^n}{1 - \frac{1}{6}} = \frac{1 - \frac{1}{6^n}}{\frac{5}{6}} = \frac{6}{5}\left(1 - \frac{1}{6^n}\right)$ d'après les résultats sur les sommes géométriques (attention le dernier terme est pour $i = n-1$ ici)

et par ailleurs $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}(v_{i+1} - v_i) = v_n - v_0$ car il s'agit d'une somme télescopique (avec pour dernier terme $i = n-1$ encore) et $v_0 = \dfrac{u_0}{2^0} = u_0 = -\dfrac{1}{5}$ donc $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}(v_{i+1} - v_i) = v_n + \frac{1}{5}$

c. En déduire, pour tout entier $n \geqslant 1$, une expression de v_n en fonction de n *1,5 points*

On va calculer $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}(v_{i+1} - v_i)$ d'une autre manière : d'après la question **4.a.**,$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{2 \times 6^n}$

donc $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}(v_{i+1} - v_i) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2 \times 6^i} = \sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{6^i}\right) = \frac{1}{2} \times \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{6^i}$ par linéarité

or d'après la question précédente $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}(v_{i+1} - v_i) = v_n + \frac{1}{5}$ d'une part et $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{6^i} = \frac{6}{5}\left(1 - \frac{1}{6^n}\right)$ d'autre part

donc $v_n + \dfrac{1}{5} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{6}{5}\left(1 - \dfrac{1}{6^n}\right)$ soit $v_n = \dfrac{3}{5}\left(1 - \dfrac{1}{6^n}\right) - \dfrac{1}{5} = \dfrac{1}{5}\left(3 - 3 \times \dfrac{1}{6^n} - 1\right) = \dfrac{1}{5}\left(2 - 3 \times \dfrac{1}{6^n}\right)$

d. Déduire de **c.** que pour tout entier n, on a : $u_n = \dfrac{1}{5}\left(2^{n+1} - \dfrac{1}{3^{n-1}}\right)$ *1 point*

Par définition de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, v_n = \dfrac{u_n}{2^n}$ donc $u_n = 2^n \times v_n$, donc d'après la question précédente

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n \times \frac{1}{5}\left(2 - 3 \times \frac{1}{6^n}\right) = \frac{1}{5}\left(2 \times 2^n - 3 \times \frac{2^n}{6^n}\right) = \frac{1}{5}\left(2^{n+1} - 3 \times \left(\frac{2}{6}\right)^n\right)$$
$$= \frac{1}{5}\left(2^{n+1} - 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) = \frac{1}{5}\left(2^{n+1} - 3 \times \frac{1}{3^n}\right) = \frac{1}{5}\left(2^{n+1} - \frac{1}{3^{n-1}}\right)$$

e. Retrouver la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *1 point*

D'après les limites de suites géométriques $2^n \to +\infty$ (forme q^n avec $q > 1$) et $\dfrac{1}{3^n} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n \to 0$ (forme q^n avec $|q| < 1$), donc par produits et additions $u_n \to +\infty$ (car $2^{n+1} = 2 \times 2^n$ et $\dfrac{1}{3^{n-1}} = 3 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$)

5. Avec Python

a. Ecrire une fonction Python, qui pour un entier n, renvoie le terme u_n de la suite. *1 point*

On peut le faire de deux (ou trois) façons, soit à l'aide la définition récursive de la suite, soit à l'aide de la formule explicite (de la question **4.d.** :

Avec la formule explicite

```
def u(n):
  return 1/5(2**(n+1)
    -1/3**(n-1))
```

Avec la définition récursive de la suite (attention à la puissance $i - 1$)

```
def u(n):
  u=-1/5
  for i in range(1,n+1):
    u=2*u+1/3**(i-1)
  return
```

Analogue avec une fonction Python récursive (qu'il faut penser à initialiser)

```
def u(n):
  if n==0 :
    return -1/5
  else :
    return 2*u(n-1)+1/3**(n-1)
```

b. Représenter graphiquement la suite jusqu'au terme u_{100} *1 point*

On exploite la fonction prédéfinie pour créer une liste contenant toutes les valeurs, puis on la représente

```
L=[u(n) for n in range(0,101)]
import matplotlib.pyplot as plt
plt.plot(L,'+') #le '+' pour avoir des points
plt.show()
```

c. Ecrire un programme Python qui renvoie le premier rang n pour lequel $u_n \geqslant 10^6$ *1 point*

A l'aide de la fonction, on calcule de manière progressive les termes tant que le seuil n'est pas atteint avec une classique boucle `while`

```
n=0
while u(n)<1e6:
  n=n+1
print(n)
```

Exercice 5 - étude de fonction et suite *11 points*

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x - \ln(x)$

1. **a.** Pour tout réel $x > 0$, calculer la valeur de $g'(x)$, la dérivée de g *0,5 point*

Soit $x > 0$, alors $g'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x}$

b. Que vaut $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x)$? en déduire $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ *1 point*

On sait que $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = +\infty$

c. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} g(n)$ et en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ *1,5 points*

$g(n) = n - \ln(n) = n\left(1 - \dfrac{\ln(n)}{n}\right)$ (on factorise par n qui est le terme dominant)

Par croissance comparée $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n)}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \dfrac{\ln(n)}{n} = 1$

et donc par opérations sur les limites $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(1 - \dfrac{\ln(n)}{n}\right) = +\infty$

on peut donc supposer que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ ce qui est le cas)

d. Dresser le tableau des variations de g sur $]0;+\infty[$ en faisant figurer $g(1)$ et les résultats obtenus aux questions **1.b.** et **1.c.** *1,5 points*

Comme x est strictement positif, $g'(x)$ est du signe de $x-1$, or $x-1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 1$

x	0		1		$+\infty$
$x-1$		-	0	$+$	
$g'(x)$	$\|\|$	-	0	$+$	
g	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	$g(1)=1$	$\nearrow$	$+\infty$

e. Justifier que pour tout réel $x>0$ on a : $g(x)>0$ *0,5 point*

g est décroissante sur $]0;1]$ puis croissante sur $[1;+\infty[$ donc $\forall x>0, g(x) \geqslant g(1)$
or $g(1)=1$ donc $\forall x>0, g(x) \geqslant 1 > 0$

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0>0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1}=g(u_n)$

a. Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie. *1 point*

La définition de la suite repose sur l'existence de $\ln(u_n)$ pour tout n
Il faut donc s'assurer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose donc $P(n)$: « u_n est bien défini et $u_n>0$ »

Initiation : $u_0>0$ donc $P(0)$ est vraie

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $P(n)$ est vraie
alors $u_n>0$, donc $g(u_n)$ (i.e. u_{n+1} est bien défini) et d'après la question 1.e, $g(u_n)>0$, i.e. $u_{n+1}>0$
c'est-à-dire que $P(n+1)$ est vraie
donc par théorème de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ est vraie.

b. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, que peut valoir sa limite ? (on admet : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\ell \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \ln(u_n)=\ln(\ell)$) *1 point*

On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et on note alors ℓ sa limite.
Par propriété sur les limites, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}=\ell$ et comme indiqué $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(u_n)=\ln(\ell)$
donc en passant à la limite dans l'égalité $u_{n+1}=u_n-\ln(u_n)$, on obtient $\ell=\ell-\ln(\ell)$, donc $\ln(\ell)=0$ et donc $\ell=1$

c. Etudier le signe de $g(x)-x$ pour $x>0$ *0,5 point*

Soit $x>0$, alors $g(x)-x=-\ln x$
donc $g(x)-x \geqslant 0$ pour $x \in [0;1]$ et $g(x)-x \leqslant 0$ pour $x \in [1;+\infty[$

d. En supposant $u_0>1$, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant 1$ *1 point*

Comme l'indique le tableau de variations à la question **1.d**, $\forall x>0, g(x)>1$, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}, g(u_n) \geqslant 1$ (car $u_n>0$), i.e. $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geqslant 1$ soit $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geqslant 1$
comme c'est aussi le cas de u_0, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant 1$

e. En supposant $u_0>1$, en déduire les variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *1 point*

D'après la question **2.c.**, $x \geqslant 1 \Rightarrow g(x) \leqslant x$
donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant 1 \Rightarrow f(u_n) \leqslant u_n$, i.e. $u_{n+1} \leqslant u_n$
donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

f. Si $u_0>1$, que vaut $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$? *0,5 point*

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et positive, donc minorée (par 0 par exemple), donc d'après le théorème de la limite monotone, elle est convergente.
et d'après la question **2.a**, sa limite ne peut être que 1, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=1$

g. Que se passe-t-il si $u_0=1$ et si $u_0<1$? *1 point*

Si $u_0=1$, on trouve alors $u_1=1$ et par récurrence immédiate, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n=1$
Si $u_0<1$, alors d'après le tableau de variations, $u_1=g(u_0)>1$ et nous sommes donc ramenés à la situation précédente (on peut poser pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n=u_{n+1}$ et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nous ramène à la situation étudiée).

Exercice 6 *7,5 points*

On définit l'application f par $f(x) = e^{\sqrt{x}}$

1. Déterminer $\mathscr{D}_f$, l'ensemble de définition de f *0,5 point*

Il n'y a pas de contrainte pour l'exponentielle qui est définie sur $\mathbb{R}$ mais pour la racine carrée qui est définie sur $\mathbb{R}_+$ donc $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}_+$

2. Déterminer $f\langle[0,+\infty[\rangle$ *2 points*

On cherchera à justifier la limite en $+\infty$

Il est nécessaire dans un premier temps d'étudier les variations (attention f n'est pas dérivable en 0)

pour $x \in \mathbb{R}$, f peut s'écrire $f(x) = e^{u(x)}$ avec $u(x) = \sqrt{x}$ (et donc $\forall x > 0, u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$)

donc $\forall x > 0, f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$ et donc $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}} = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$

donc $\forall x > 0, f'(x) > 0$ (l'exponentielle étant toujours strictement positive, de même que la racine carrée pour $x \neq 0$) et de fait f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ et donc sur $\mathbb{R}_+$

donc $f\langle[0,+\infty[\rangle = \left[f(0), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[$ (on doit théoriquement invoquer la continuité de f également)

bien que nous n'ayons pas encore vu les limites de fonctions, nous savons que $\sqrt{n} \to +\infty$ quand n tend vers $+\infty$ donc on suppose que $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ (ce qui est vrai), de fait $f(x)$ va tendre vers « $\exp(+\infty)$ » (cette notation n'est pas rigoureuse) quand x tend vers $+\infty$

de plus $f(0) = e^{\sqrt{0}} = e^0 = 1$ d'où $f\langle[0,+\infty[\rangle = [1,+\infty[$

3. Montrer que f n'est pas surjective de $\mathscr{D}_f$ dans $\mathbb{R}$ *0,5 point*

Il est évident que f ne prend que des valeurs strictement positives (c'est le résultat d'une exponentielle), donc $f(x) = -1$ n'admet pas de solution (de même que $f(x) = y$ pour n'importe quel $y \leqslant 0$ et même $y < 1$ en fait).

4. Montrer que f est injective. *1 point*

On peut le justifier avec la stricte monotonie (croissance ici) de f,
en effet si $x \neq x'$, alors soit $x < x'$ et dans ce cas $f(x) < f(x')$; soit $x > x'$ et dans ce cas $f(x) > f(x')$
dans tous les cas $f(x) \neq f(x')$ ce qui signifie que f est injective

Option B - méthode classique : soit $(x,x') \in \mathbb{R}_+^2$
alors $f(x) = f(x') \Rightarrow e^{\sqrt{x}} = e^{\sqrt{x'}}$
donc $\ln\left(e^{\sqrt{x}}\right) = \ln\left(e^{\sqrt{x'}}\right)$ (il s'agit de nombres strictement positifs)
donc $\sqrt{x} = \sqrt{x'}$ et en prenant le carré de l'égalité
on trouve $x = x'$, ce qui signifie que f est injective

5. Démontrer que f est une bijection de $\mathscr{D}_f$ dans un intervalle que l'on précisera et donner sa bijection réciproque.

Grâce au résultat de la question **2.**, on comprend que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $[1,+\infty$, ce que nous allons démontrer, à nouveau avec la méthode officielle : soit $y \in [1,+\infty[$, alors pour $x \in \mathscr{D}_f$

$f(x) = y \Leftrightarrow e^{\sqrt{x}} = y \Leftrightarrow \ln\left(e^{\sqrt{x}}\right) = \ln(y)$ car il s'agit de nombres strictement positifs, donc on peut composer par ln (et exp dans l'autre sens) donc $f(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{x} = \ln(y) \Leftrightarrow \sqrt{x}^2 = (\ln(y))^2$

on garde l'équivalence en passant au carré car il s'agit de nombres positifs : $y \geqslant 1 \Rightarrow \ln(y) \geqslant \ln(1)$ (car la fonction ln est strictement croissante), i.e. $\ln(y) > 0$ et donc $f(x) = y \Leftrightarrow x = (\ln(y))^2$

et il est évident que l'antécédent trouvé est bien dans $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}_+$ (c'est un carré donc c'est positif)

finalement $\forall y \in [1,+\infty[$, l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+$, ce qui signifie que f est bijective, de plus $f^{-1} : \begin{array}{ccc} [1,+\infty[& \to & \mathbb{R}_+ \\ y & \mapsto & (\ln(y))^2 \end{array}$ *2 points*

6. Avec Python, définir la fonction f, puis la représenter sur l'intervalle $[0,10]$ *1,5 points*

```
import numpy as np #pour disposer de l'exponentielle , la racine carrée et de linspace
def f(x) : # on définit la fonction
    return np.exp(np.sqrt(x))
import matplotlib.pyplot as plt # on importe la librairie pour la représenter
x=np.linspace(0,10,100) # on définit 100 abscisses entre 0 et 10
y=f(x) # on calcule les 100 images respectives
plt.plot(x,y) # on peut utiliser + pour avoir seulement les points
plt.show()
```