Devoir à faire en binôme, obligatoirement, vous rendrez une copie pour deux. Objectif qualité !

Exercice 1 - pour s'échauffer

Dans chacun des cas suivants, préciser si les produit AB et BA existe(nt) et, si oui, le(s) calculer.

1. $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 2 - inversion matrice 2×2

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

1. Montrer que $A^2 = 4A - 8I_2$

2. En déduire que A est inversible et donner son inverse.

3. Retrouver le résultat de la question précédente d'une autre manière

Exercice 3 - le clasico

Le but de cet exercice est de donner des formules explicites des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par les premiers termes :

$$u_0 = 1 \quad v_0 = 0 \quad w_0 = 1$$

et les relations de récurrences $\begin{cases} u_{n+1} &= 3u_n - 2v_n - w_n \\ v_{n+1} &= u_n - w_n \\ w_{n+1} &= 2u_n - 2v_n \end{cases}$

1. Etude informatique préalable

Avec Python, écrire un programme qui calcule et représente les 100 premières valeurs de chaque suite.

2. Puissances de matrices

On considère les matrices

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calculer PQ, que peut-on en déduire sur P ? sur Q ?

b) Montrer que $D = P^{-1}CP$

c) Exprimer C en fonction de D, P et P^{-1}

d) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, C^n = PD^nP^{-1}$

e) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, expliciter D^n, puis C^n

3. Suites

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$

a) Montrer que le produit CX_n est bien défini puis que $X_{n+1} = CX_n$

b) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = C^nX_0$

c) Que vaut X_0 ? En déduire les formules explicites de X_n, puis u_n, v_n et w_n

d) Déterminer les limites des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$?