Corrigés, entre autres, des exercices (ou partie) non abordés en classe

Exercice 9

Soit $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^2 et A^3

2. Donner, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, l'expression de A^p en fonction de p

3. Soit n un entier tel que $n \geqslant 2$
Soit $J = (a_{k,l})_{\substack{1\leqslant k\leqslant n \\ 1\leqslant l\leqslant n}}$ la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $a_{k,l} = 1$ pour tous k et l éléments de $[\![1, n]\!]$

a. Montrer que $J^2 = nJ$

De même que nous avons vu à la question **1.** que $A^2 = 3A$ et que $\forall p \in \mathbb{N}, A^p = 3^{p-1}A$, on montre dans le cas général d'une matrice de taille n $J^2 = nJ$ et que $J^p = n^{p-1}J$
Pour montrer rigoureusement, que $J^2 = nJ$, on peut utiliser la définition pour calculer le produit J^2
en appelant $c_{i,j}$ le coefficient d'indice i, j de la matrice J^2, par définition du produit (de J avec J) :
$c_{i,j} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}a_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} 1 \times 1 = \sum_{k=1}^{n} 1 = n$
(car tous les coefficients de J valent 1)
donc $J^2 = (n)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}} = n(1)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}} = nJ$

b. Exprimer J^p à l'aide de J pour tout $p \in \mathbb{N}^*$

On procède par récurrence de manière analogue à la question **2.**, pour $p \in \mathbb{N}^*$, on définit $P(p) : J^p = n^{p-1}J$

<u>Initialisation</u> : $P(1)$ est vraie $\Leftrightarrow J^1 = n^{1-1}J \Leftrightarrow J = n^0 J \Leftrightarrow J = J$ ce qui est vrai donc $P(1)$ est vraie

<u>Hérédité</u> : soit $p \in \mathbb{N}^*$, on suppose que $P(p)$ est vraie
alors par hypothèse $J^p = n^{p-1}J$ donc $J^pJ = n^{p-1}JJ$
i.e. $J^{p+1} = n^{p-1}J^2$
or $J^2 = nJ$ d'après **3.a.** donc $J^{p+1} = n^{p-1}nJ$
donc $J^{p+1} = n^pJ$ i.e. $P(p+1)$ est vraie, d'où l'hérédité
donc par théorème de récurrence, $\forall p \in \mathbb{N}^*, P(p)$ est vraie, i.e. $J^p = n^{p-1}J$

Exercice 11

Exercice un peu abstrait, mais qui montre que certaines propriétés se transmettent « facilement », c'est-à-dire qu'elles sont linéaires.

Soit A et B deux matrices de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$
On note E l'ensemble des matrices M de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ vérifiant : $AM = BM$

1. On suppose que $M_1 \in E$ et que $M_2 \in E$. Montrer que $M_1 + M_2 \in E$

Soit $(M_1, M_2) \in E^2$,
alors par définition $AM_1 = BM_1$ et $AM_2 = BM_2$
donc $AM_1 + AM_2 = BM_1 + BM_2$ donc $A(M_1 + M_2) = B(M_1 + M_2)$
i.e. $M_1 + M_2 \in E$

2. On suppose que $N \in E$, et que λ est un nombre réel. Vérifier que $\lambda N \in E$

Soit $N \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,
alors par définition $AN = BN$ et donc $\lambda AN = \lambda BN$
ce que l'on peut écrire $A(\lambda N) = B(\lambda N)$ ce qui signifie, $\lambda N \in E$

Exercice 15

Soit $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$$

1. Exprimer A^2 à l'aide de A et de I_3
2. En déduire que A est inversible, et déterminer A^{-1}
3. Montrer par récurrence qu'il existe deux suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies de manière unique, telles que :
   $\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = a_n A + b_n I_3$
4. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
5. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, l'expression de a_n en fonction de n, puis celle de b_n.

   On met en place la méthode pour expliciter les suites récurrentes linéaires d'ordre 2. D'après la question précédente : $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = a_{n+2} + 2a_n$, on étudie donc l'équation caractéristique $x^2 - x - 2 = 0$ qui admet pour racines évidentes -1 et 2
   donc $\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, a_n = \lambda(-1)^n + \mu 2^n$
   en particulier $a_0 = \lambda + \mu$ et $a_1 = -\lambda + 2\mu$
   or $a_0 = 0$ car $A^0 = I_3 = 0 \times A + I_3$ et $a_1 = 1$ car $A = 1 \times A + 0 \times I_3$
   donc $\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ -\lambda + 2\mu = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\mu \\ 3\mu = 1 \text{ par substitution} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\dfrac{1}{3} \\ \mu = \dfrac{1}{3} \end{cases}$
   donc $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \dfrac{1}{3}((-1)^{n+1} + 2^n)$
   de plus $\forall n \in \mathbb{N}, b_{n+1} = 2a_n$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = 2a_{n-1} = 2\dfrac{1}{3}((-1)^n + 2^{n-1}) = \dfrac{1}{3}(2 \times (-1)^n + 2^n)$
   or $b_0 = 1$ car $A^0 = 0 \times A + 1 \times I_3$, donc la formule est aussi valable pour $n = 0$
   donc $\forall n \in \mathbb{N}, b_n = 2\dfrac{1}{3}((-1)^n + 2^{n-1}) = \dfrac{1}{3}(2 \times (-1)^n + 2^n)$

6. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, l'expression de A^n en fonction de n

   D'après les questions **3.** et **5.**, on peut écrire :
   $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \dfrac{1}{3}((-1)^{n+1} + 2^n)A + \dfrac{1}{3}(2 \times (-1)^n + 2^n)I_3$ et donc
   $$A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(2 \times (-1)^n + 2^n) & \frac{1}{3}((-1)^{n+1} + 2^n) & \frac{1}{3}((-1)^{n+1} + 2^n) \\ \frac{1}{3}((-1)^{n+1} + 2^n) & \frac{1}{3}(2 \times (-1)^n + 2^n) & \frac{1}{3}((-1)^{n+1} + 2^n) \\ \frac{1}{3}((-1)^{n+1} + 2^n) & \frac{1}{3}((-1)^{n+1} + 2^n) & \frac{1}{3}(2 \times (-1)^n + 2^n) \end{pmatrix}$$
   ou $A^n = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \times (-1)^n + 2^n & (-1)^{n+1} + 2^n & (-1)^{n+1} + 2^n \\ (-1)^{n+1} + 2^n & 2 \times (-1)^n + 2^n & (-1)^{n+1} + 2^n \\ (-1)^{n+1} + 2^n & (-1)^{n+1} + 2^n & 2 \times (-1)^n + 2^n \end{pmatrix}$

Exercices plus difficiles

Exercice 19

Soit n un entier tel que $n \geqslant 2$. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Soit J la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1
On note s la somme de tous les coefficients de la matrice A
A l'aide de la formule du produit matriciel, montrer que : $JAJ = sJ$

On est obligé de formaliser la question avec la formule du produit.
On peut le faire en posant $B = AJ$ avec $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$
alors par définition $\forall i,j \in [\![1,n]\!], b_{i,j} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \times 1$ (car tous les coefficients de la matrice J valent 1)
donc $b_{i,j} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}$
Et en notant $C = JAJ = JB$ avec $C = (c_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.
alors de même $\forall i,j \in [\![1,n]\!], c_{i,j} = \displaystyle\sum_{l=1}^{n} 1 \times b_{l,j} = \sum_{l=1}^{n} b_{l,j}$
or $b_{l,j} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{l,k}$ donc $c_{i,j} = \displaystyle\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{l,k}$, i.e. $c_{i,j} = s$ et ce quel que soit le coefficient.

Exercice 20

Soit P le polynôme défini par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = x^2 - 3x + 2$ et A la matrice carrée de taille 3 suivante : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

- lorsque T est un polynôme défini par :
  $\forall x \in \mathbb{R}, \quad T(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$
  $T(A)$ désigne la matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ suivante : $a_0 I_3 + a_1 A + a_2 A^2 + \ldots + a_n A^n$
- lorsque T et V sont des polynômes et $R = T + V$, alors $R(A) = T(A) + V(A)$
- lorsque T et V sont des polynômes et $R = TV$, alors $R(A) = T(A)V(A)$

1. Déterminer les racines de P

P admet 1 et 2 comme racines évidentes.

2. Soit n un entier tel que $n \geqslant 2$. On admet qu'il existe Q un polynôme, et $R \in \mathbb{R}_1[X]$ tels que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^n = P(x)Q(x) + R(x)$$
Grâce à la question précédente, déterminer les coefficients du polynôme R

Sachant que d'une part $R \in \mathbb{R}_1[X]$, i.e. $R(x) = ax + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et que d'autre part $P(1) = P(2) = 0$
alors en utilisant l'expression donnée :
$1^n = P(1)Q(1) + R(1)$ i.e. $1 = R(1) = a + b$
et de même $2^n = P(2)Q(2) + R(2)$ i.e. $2^n = R(2) = 2a + b$
donc $a = 2^n - 1$ et $b = 2 - 2^n$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, R(x) = (2^n - 1)x + 2 - 2^n$

3. Vérifier que $P(A) = 0_{3,3}$

$A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -9 & 10 & -9 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ donc $P(A) = A^2 - 3A + 2I_3 = \begin{pmatrix} -2+0+2 & 3-3+0 & -3+3+0 \\ -9+9+0 & 10-12+2 & -9+9+0 \\ -3+3+0 & 3-3+0 & -2+0+2 \end{pmatrix}$
soit $P(A) = 0_{3,3}$

4. Soit n un entier tel que $n \geqslant 2$. Grâce à la question 2, montrer que
$$A^n = \begin{pmatrix} 2-2^n & 2^n - 1 & 1 - 2^n \\ 3(1-2^n) & 3 \times 2^n - 2 & 3(1-2^n) \\ 1 - 2^n & 2^n - 1 & 2 - 2^n \end{pmatrix}$$

Les deux polynômes x^n et $P(x)Q(x) + R(x)$ étant égaux, les polynômes de matrices associés sont égaux aussi : i.e. $A^n = P(A)Q(A) + R(A)$

or $P(A)=0_{3,3}$ donc $A^n=R(A)=(2^n-1)A+(2-2^n)I_3$

$$= \begin{pmatrix} (2-2^n) & (2^n-1) & -(2^n-1) \\ -3(2^n-1) & 4(2^n-1)+(2-2^n) & -3(2^n-1) \\ -(2^n-1) & (2^n-1) & (2-2^n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2^n & 2^n-1 & 1-2^n \\ 3(1-2^n) & 3\times 2^n-2 & -3(1-2^n) \\ 1-2^n & 2^n-1 & 2-2^n \end{pmatrix}$$

Exercice 21 - Problème-type

On considère deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$u_0=0,\quad v_0=1,\quad \text{et}\quad \forall n\in\mathbb{N},\quad \begin{cases} u_{n+1} &= -2u_n+v_n \\ v_{n+1} &= 3u_n \end{cases}$$

1. a. Déterminer une matrice carrée A de taille 2 telle que :

$$\forall n\in\mathbb{N}, \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$

On pose $A=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

on obtient alors $A\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2u_n+v_n \\ 3u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix}$

b. En déduire que : $\forall n\in\mathbb{N},\quad \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Démonstration classique par récurrence, la suite de matrices est analogue à une suite géométrique.

Pour $n\in\mathbb{N}$, on définit l'assertion $P(n)$: $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Initialisation : $A^0=I_2$ donc $A^0\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ et donc $P(0)$ est vérifiée.

Hérédité : soit $n\in\mathbb{N}$, supposons que $P(n)$ soit vraie

d'après **1.a.** $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ et par hypothèse de récurrence $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

donc $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = AA^n\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = A^{n+1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $P(n+1)$ est vérifiée, d'où l'hérédité

donc par théorème de récurrence, $\forall n\in\mathbb{N}, P(n)$ est vraie, i.e. $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. On note $Q=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ la matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$

a. Justifier que Q est inversible puis déterminer Q^{-1}

On utilise le critère d'inversibilité pour les matrices de taille 2, ici : $1\times(-1)-1\times 3=-4$

donc Q est inversible et de plus $Q^{-1}=\frac{-1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

b. Déterminer la matrice D telle que $D=Q^{-1}AQ$

Il suffit de calculer, on pressent que D est une matrice diagonale :

$$Q^{-1}AQ = \frac{-1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{-1}{4}\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$$

c'est bien le cas, $D=$diag$(1,-3)$

c. Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $A^n=QD^nQ^{-1}$

Commençons par inverser la formule précédente : $D=Q^{-1}AQ \Rightarrow QD=AQ \Rightarrow QDQ^{-1}=A$ puis on procède par récurrence.

Pour $n\in\mathbb{N}$, on définit l'assertion $P(n)$: $A^n=QD^nQ^{-1}$

Initialisation : $P(0)$ est vraie $\Leftrightarrow A^0 = QD^0Q^{-1} \Leftrightarrow I_2 = QI_2Q^{-1}$
ce qui est le cas car $QI_2Q^{-1} = QQ^{-1} = I_2$ donc $P(0)$ est vraie

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $P(n)$ vraie
donc par hypothèse $A^n = QD^nQ^{-1}$
donc $A^{n+1} = A^n \times A = QD^nQ^{-1}QDQ^{-1} = QD^nI_2DQ^{-1} = QD^nDQ^{-1} = QD^{n+1}Q^{-1}$
donc $P(n+1)$ est vraie
donc par théorème de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ est vraie, i.e. $A^n = QD^nQ^{-1}$

d. En déduire que pour tout entier naturel n :

$$A^n = \frac{-1}{4}\begin{pmatrix} -1+(-3)^{n+1} & -1+(-3)^n \\ -3-(-3)^{n+1} & -3-(-3)^n \end{pmatrix}$$

Par propriété sur les matrices diagonales : $\forall n \in \mathbb{N}, D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & (-3)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-3)^n \end{pmatrix}$

de fait, d'après **1.c.**,

$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-3)^n \end{pmatrix}\frac{-1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ (-3)\times(-3)^n & (-3)^n \end{pmatrix}$

donc $A^n = \frac{-1}{4}\begin{pmatrix} -1+(-3)^{n+1} & -1+(-3)^n \\ -3-(-3)^{n+1} & -3-(-3)^n \end{pmatrix}$ d'où le résultat

e. Déterminer les valeurs de u_n et v_n en fonction de n

$\forall n \in \mathbb{N}$,

$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{4}\begin{pmatrix} -1+(-3)^{n+1} & -1+(-3)^n \\ -3-(-3)^{n+1} & -3-(-3)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{4}\begin{pmatrix} -1+(-3)^n \\ -3-(-3)^n \end{pmatrix}$

de fait $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{4}(1-(-3)^n)$ et $v_n = \frac{1}{4}(3+(-3)^n)$

f. Etudier les limites des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Par propriété sur les suites géométriques $((-3)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge (forme q^n avec $q \leqslant -1$) donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent.