Plan de travail

Notion	Exercices a minima	Mais aussi
Calculs de limites	1, 2, 3	
Etude de fonction et limite	4, 5, 6	7, 8
Continuité	9, 10	11
TVI et théorème de la bijection	12, 13, 16	15
Fonction et suite	14, 18	17

Calcul de limites

Exercice 1

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{1}{x^3}$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2}$

3. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \dfrac{1}{x^3}$

4. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} \dfrac{1}{x^3}$

5. $\lim\limits_{x\to -\infty} -2x^5 + \dfrac{6}{x} + 13$

6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{9}{x\sqrt{x}}$

7. $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{x^2+x+1}$

8. $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+x+1}$

9. $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{2}{x-2} - \dfrac{3}{(x-2)^2}\right)$

10. $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\x>-2}} \dfrac{x^2-2x-8}{\sqrt{x+2}}$

11. $\lim\limits_{x\to +\infty} (x^3-3x^2+5)$

12. $\lim\limits_{x\to -\infty} x^2+3x-\dfrac{1}{4x+1}$

13. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2+1}{2x^2-2x+1}$

14. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x^3+1}{x^2-1}$

15. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\x>2}} \dfrac{3x^2+2x+1}{x-2}$

16. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\x<2}} \dfrac{x^2-5x+6}{(2-x)^2}$

17. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{-2x-5}{\sqrt{x-3}}$

18. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}$

19. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+7}-3}{\sqrt{x-2}}$

20. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x>1}} \dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}$

21. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2}\left(1+\sqrt{x}\right)$

Exercice 2

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x}\ln(x)}{x+1}$

2. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x-x+1}{x+\ln(x)}$

3. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x-x}{e^x-1}$

4. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{e^x-x}{e^x-1}$

5. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^{2x-1}}{(\ln(x))^4}$

6. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(\sqrt{x})}{x^{\frac{1}{4}}}$

7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\sqrt{x})}{x^{\frac{1}{4}}}$

8. $\lim\limits_{x\to -\infty} (6+x^2)e^x$

9. $\lim\limits_{x\to +\infty} (x^3-e^{2x})$

Exercice 3

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{(3+x^2)}$

2. $\lim\limits_{x\to 1} \ln(x-1) - \dfrac{1}{\ln(x)}$

3. $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}}$

4. $\lim\limits_{x\to 1} (x^2-1)\ln(x-1)$

5. $\lim\limits_{x\to 1} (x-1)\ln\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$

6. $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x+1)-\ln(x+4)$

7. $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{1}{x-3} - \dfrac{1}{x^2-9}$

8. $\lim\limits_{x\to 0} (1-e^{-x^2/3})$

9. $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x^2+1)-2\ln(x)$

10. $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{-1/x}$

Existence de limites

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur son domaine de définition $\mathscr{D}_f$ par : $f(x) = \ln(x)\ln(\ln(x))$

1. Déterminer $\mathscr{D}_f$

2. Déterminer les limites de f aux extrémités de $\mathscr{D}_f$

3. Soit g l'application de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 1 \\ x^{\ln(\ln(x))} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$
g admet-elle une limite en 1 ?

Exercice 5

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = x\left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$

1. Donner une expression simple de $f(x)$ pour $x > 1$
En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2. Donner une expression simple de $f(x)$ pour $x \leqslant -1$
En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

3. **a.** Montrer que pour $x > 0$, $1 - x < f(x) \leqslant 1$
En déduire que f admet une limite à droite en 0, que l'on déterminera.

b. Montrer que pour $x < 0$, $1 \leqslant f(x) < 1 - x$
En déduire que f admet une limite à gauche en 0, à déterminer également.

c. f admet-elle une limite en 0 ?

Exercice 6

Dans chacune des questions suivantes, déterminer si f admet une limite en $a = 0$. Déterminer cette limite dans le cas où elle existe.

1. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{\frac{1}{x}} \end{array}$

2. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lfloor x^2 \rfloor \end{array}$

Exercice 7

Soit f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = \dfrac{\lfloor x \rfloor + 1}{\sqrt{x}}$

Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Exercice 8

Soit $a > 0$, fixé

▷ Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \varphi(x) = \ln(1+x) - x$

▷ Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :
$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad h(x) = \ln(1+x) - \dfrac{x}{1+x}$

▷ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = \left(1 + \dfrac{a}{x}\right)^x$

▷ Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $g(x) = \left(1 + \dfrac{a}{x}\right)^{x^2}$

1. Etudier les variations de h et de φ

2. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \dfrac{x}{1+x} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$

3. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \dfrac{ax}{a+x} \leqslant \ln\big(f(x)\big) \leqslant a$

4. En déduire la limite $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\big(f(x)\big)$, puis la limite $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

5. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, encadrer le nombre $\ln\big(g(x)\big)$
En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\big(g(x)\big)$, puis $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

Etude de continuité

Exercice 9

Soit f une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$
Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$ dans les cas suivants.

1. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{-3x+2} & \text{si} \quad x < \dfrac{2}{3} \\ 3x-2 & \text{si} \quad x \geqslant \dfrac{2}{3} \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x+2|}{x+2} & \text{si} \quad x \neq -2 \\ 1 & \text{si} \quad x = -2 \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(x)}{x} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{cases}$

4. $f(x) = \begin{cases} \ln(x) & \text{si} \quad x \geqslant 1 \\ e^x - e & \text{si} \quad x < 1 \end{cases}$

5. $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$

Exercice 10

Etudier la continuité des fonctions f suivantes, sur les intervalles I donnés.

1. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+\sqrt{x}}{x^2+\sqrt{x}} & \text{si} \quad x > 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$ avec $I = \mathbb{R}_+$

2. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lfloor x \rfloor}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$ avec $I =]-1, 1[$

3. $f(x) = x^2 \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$ avec $I = \left[\dfrac{1}{3}, 1\right]$

Exercice 11

Répondre aux questions suivantes pour

1. $f(x) = \sqrt{x}\ln(x)$

2. $f(x) = \left(\dfrac{1}{x}\right)^{\ln(x)}$

a) Déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}_f$ de f

b) Justifier que f est continue sur $\mathscr{D}_f$

c) Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$?

d) Peut-on proposer une valeur pour $f(0)$ qui « prolonge f par continuité » ?

Utilisation des théorèmes généraux

Exercice 12

Montrer que l'équation $e^{-x} = x^2$ admet au moins une solution.

Exercice 13

1. Montrer que l'équation $\ln(x) = \dfrac{1}{e^x}$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]0, +\infty[$

2. Montrer que $1 < \alpha < e$

Exercice 14

Soit : $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x^2+8}{6} \end{array}$

et u une suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$

1. Justifier que f est continue.

2. Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}_+$

3. Tracer $\mathscr{C}_f$, et la droite d'équation $y = x$, sur un même schéma.

4. Résoudre l'équation $f(x) = x$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$, interpréter graphiquement le résultat.

5. Donner le signe de $f(x) - x$ pour $x \in \mathbb{R}_+$

6. Dans cette question, on suppose que $u_0 \in [0, 2[$

a. Montrer que $f\langle[0,2]\rangle \subset [0,2]$

b. En déduire par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [0,2]$

c. Montrer que u est croissante. (On utilisera la question 5).

   d. Montrer que u converge vers un réel ℓ

   e. Montrer que $f(\ell) = \ell$, en déduire la valeur de ℓ

7. Faire la même démarche (**a. b. c.**) avec $u_0 > 4$
   Qu'est-ce que cela change pour la limite ?

Exercice 15

Soit f définie sur $I = [1, +\infty[$ par : $\forall x \in I, \quad f(x) = \dfrac{1}{x + \ln(x)}$

1. Montrer que f réalise une bijection de I dans un intervalle J à préciser.
2. Justifier que f^{-1} est continue sur J
3. Quelles sont les variations de f^{-1} sur J ?
4. Tracer sur un même schéma les courbes représentatives de f et de f^{-1}

Exercice 16

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = x - \ln(x)$

1. Dresser le tableau des variations de f en précisant ses limites en 0 et en $+\infty$
2. Montrer que l'équation $f(x) = 2$ d'inconnue $x \in]0, +\infty[$ admet exactement deux solutions, que l'on notera a et b, telles que : $0 < a < 1 < b$
3. On donne : $\ln(2) \approx 0,7$. Montrer que : $b \in [2, 4]$

Exercice 17

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^x + x$

1. Justifier que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans un intervalle J à préciser.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, l'équation $e^x + x = n$ admet une unique solution, qu'on notera u_n
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(u_{n+1}) - f(u_n) > 0$
4. En déduire la monotonie de la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
5. **a.** Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\ln\big(n - \ln(n)\big) \leqslant u_n \leqslant \ln(n)$

   b. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{\ln(n)}$

Exercice 18

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$ et g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = f(x) - x$

1. Etudier les variations de f
2. Etudier les variations de g
3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution, qu'on notera α
4. En déduire le signe de $g(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$
5. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que : $\begin{cases} u_0 > \alpha \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

   a. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > \alpha$

   b. En déduire que la suite u est décroissante (on utilisera la question 3).

   c. Justifier que u converge, et que sa limite vaut α