Corrigé *Total sur 18 points*

Exercice 1 *1 point par question - total : 4 points*

Dans chacun des cas suivants, préciser si les produits AB et BA existe(nt) et, si oui, le(s) calculer.

1. $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \times (-1) - \frac{2}{5} \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{15} - \frac{6}{15} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{11}{15} \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} (-1) \times \frac{1}{3} & (-1) \times \left(-\frac{2}{5}\right) \\ 1 \times \frac{1}{3} & 1 \times \left(-\frac{2}{5}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \times 2 + 1 \times (-2) & 1 \times (-2) + 1 \times 2 & 1 \times 4 + 1 \times (-4) \\ (-1) \times 2 + (-1) \times (-2) & (-1) \times (-2) + (-1) \times 2 & (-1) \times 4 + (-1) \times (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

BA n'est pas défini car le nombre de colonnes de B est différent du nombre de lignes de A.

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 0 \times 2 + 0 \times 3 & 1 \times 4 + 0 \times 5 + 0 \times 6 & 1 \times 7 + 0 \times 8 + 0 \times 9 \\ 0 \times 1 + 1 \times 2 + 0 \times 3 & 0 \times 4 + 1 \times 5 + 0 \times 6 & 0 \times 7 + 1 \times 8 + 0 \times 9 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

BA n'est pas défini.

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

De même, $BA = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 4 \times 0 & 1 \times 0 + 4 \times 1 & 1 \times 0 + 4 \times 0 \\ 2 \times 1 + 5 \times 0 & 2 \times 0 + 5 \times 1 & 2 \times 0 + 5 \times 0 \\ 3 \times 1 + 6 \times 0 & 3 \times 0 + 6 \times 1 & 3 \times 0 + 6 \times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 - inversion matrice 2×2 *3 points*

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

1. Montrer que $A^2 = 4A - 8I_2$ *1 point*

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1-5 & 5+15 \\ -1-3 & -5+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 20 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$$

et $4A - 8I_2 = \begin{pmatrix} 4-8 & 20-0 \\ -4-0 & 12-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 20 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$

l'égalité est donc vérifiée.

2. En déduire que A est inversible et donner son inverse. *1 point*

On déduit de l'égalité précédente que $A^2 - 4A = -8I_2$

donc $-\frac{1}{8}(A^2 - 4A) = I_2$ puis $-\frac{1}{8}A(A - 4I_2) = I_2$

et donc $A\left(-\frac{1}{8}A + \frac{1}{2}I_2\right) = I_2$

On en déduit que A est inversible et que $A^{-1} = -\frac{1}{8}A + \frac{1}{2}I_2$

3. Retrouver le résultat de la question précédente d'une autre manière. *1 point*

En calculant le déterminant : $ad - bc = 1 \times 3 - 5 \times (-1) = 8$, on retrouve que la matrice est inversible et de plus, dans ce cas, on connait son inverse qui est :

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

pour être sûr qu'il s'agit de la même chose, on calcule :

$$-\frac{1}{8}A + \frac{1}{2}I_2 = \frac{1}{8}(-A + 4I_2) = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -1+4 & -5+0 \\ 1+0 & -3+4 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 - le clasico *11 points*

Le but de cet exercice est de donner des formules explicites des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par les premiers termes : $u_0 = 1 \quad v_0 = 0 \quad w_0 = 1$

et les relations de récurrences $\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n - 2v_n - w_n \\ v_{n+1} = u_n - w_n \\ w_{n+1} = 2u_n - 2v_n \end{cases}$

1. Etude informatique préalable

Avec Python, écrire un programme qui calcule et représente les 100 premières valeurs de chaque suite.

On commence par créer trois listes contenant les premiers termes respectifs de chaque suite puis on les complète de manière itérative et simultanée en calculant les nouveaux termes à l'aide des précédents.Enfin, on représente les trois listes. Finalement, on ne voit pas grand chose car les dernières valeurs des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ « écrasent » les précédentes. *1,5 points*

```
U=[1]
V=[0]
W=[1]
for i in range(1,100):
  U.append(3*U[i-1]-2*V[i-1]-W[i-1])
  V.append(U[i-1]-W[i-1])
  W.append(2*U[i-1]-2*V[i-1])

import matplotlib.pyplot as plt
plt.plot(U,'*')
plt.plot(V,'+')
plt.plot(W,'o')
plt.show()
```

2. Puissances de matrices

On considère les matrices

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calculer PQ, que peut-on en déduire sur P ? sur Q ? *1 point*

$$PQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

donc P est inversible et $Q = P^{-1}$

b) Montrer que $D = P^{-1}CP$ *1 point*

$$CP = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2-1 & 3-2+0 & 3+0-1 \\ 1+0-1 & 1+0+0 & 1+0-1 \\ 2-2+0 & 2-2+0 & 2+0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

donc (sachant que $P^{-1} = Q$)

$$QCP = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = D$$

c) Exprimer C en fonction de D, P et P^{-1} *0,75 point*

On déduit de la question précédente que $PD = PP^{-1}CP = I_3CP = CP$
et donc $PDP^{-1} = CPP^{-1} = CI_3 = C$

d) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, C^n = PD^nP^{-1}$ *1,5 points*

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit l'assertion $P(n) : C^n = PD^nP^{-1}$

<u>Initialisation</u> : $P(0)$ est vraie $\Leftrightarrow C^0 = PD^0P^{-1} \Leftrightarrow I_3 = PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3$
donc $P(0)$ est vraie

<u>Hérédité</u> : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $P(n)$ vraie
donc par hypothèse $C^n = PD^nP^{-1}$
donc $C^{n+1} = C^n \times C = PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^nI_3DP^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$
donc $P(n+1)$ est vraie
donc par théorème de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ est vraie.

e) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, expliciter D^n, puis C^n *1,5 points*

Par propriété sur les matrices diagonales, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$D^n = \begin{pmatrix} 0^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \text{ donc } C^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{soit } C^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2^n & -2^n & 0 \end{pmatrix} \text{ et donc } C^n = \begin{pmatrix} 1+2^n & -2^n & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2^n & -2^n & 0 \end{pmatrix}$$

Nota bene : on remarque que pour $n = 0$, la formule n'est pas vérifiée puisque $C^0 = I_3$

3. Suites

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$

a) Montrer que le produit CX_n est bien défini puis que $X_{n+1} = CX_n$ *0,75 point*

C possède 3 colonnes, ce qui correspond au nombre de lignes de X_n, donc le produit CX_n est bien défini et $CX_n = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3u_n - 2vn - w_n \\ u_n - w_n \\ 2u_n - 2v_n \end{pmatrix}$

or par définitions des suites $3u_n - 2vn - w_n = u_{n+1}$ $\quad u_n - w_n = v_{n+1}$ $\quad 2u_n - 2v_n = w_{n+1}$

donc $CX_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix}$ i.e. $CX_n = X_{n+1}$

b) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = C^n X_0$ *1 point*

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit l'assertion $Q(n)$: $X_n = C^n X_0$

Initiation : $Q(0)$ est vraie $\Leftrightarrow X_0 = C^0 X_0 \Leftrightarrow X_0 = I_3 X_0$
donc $P(0)$ est vraie

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $Q(n)$ est vraie
d'après la question précédente $X_{n+1} = CX_n$
or, par hypothèse de récurrence, $X_n = C^n X_0$
donc $X_{n+1} = CC^n X_0 = C^{n+1} X_0$
c'est-à-dire que $Q(n+1)$ est vraie
donc par théorème de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, Q(n)$ est vraie.

c) Que vaut X_0 ? En déduire les formules explicites de X_n, puis u_n, v_n et w_n. *1,5 points*

Par définition $X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et d'après la partie **1.** $C^n = \begin{pmatrix} 1+2^n & -2^n & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2^n & -2^n & 0 \end{pmatrix}$

donc $X_n = \begin{pmatrix} 1+2^n & -2^n & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2^n & -2^n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et donc $X_n = \begin{pmatrix} 1+2^n-1 \\ 1-1 \\ 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n \\ 0 \\ 2^n \end{pmatrix}$

donc par définition de $X_n, \forall x \in \mathbb{N}, u_n = 2^n \quad v_n = 0 \quad w_n = 2^n$

d) Déterminer les limites des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$? *0,5 point*

On déduit immédiatement que $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} w_n = +\infty$ (forme q^n avec $q > 1$) et $\lim_{n\to\infty} v_n = 0$