Objectifs d'apprentissage

A la fin de ce chapitre, je sais :

- utiliser la définition d'une série et de sa convergence ☐
- exploiter les propriétés de convergence de combinaisons linéaires de séries convergentes ☐
- établir ou utiliser des inégalités pour caractériser la nature d'une série ☐
- identifier et interpréter la divergence grossière ☐
- utiliser les propriétés des séries à termes positifs et la convergence absolue ☐
- reconnaitre et exploiter les séries de référence :

  $\sum_n q^n$, $\sum_n nq^{n-1}$, $\sum_n n(n-1)q^{n-2}$ ainsi que la série exponentielle : $\sum_n \frac{x^n}{n!}$ ☐

Sans que cela soit explicitement à notre programme, il est bon également de reconnaitre les séries de Riemann et de connaitre le critère pour leur convergence.

Introduction

Une série numérique est une suite qui s'écrit sous la forme d'une somme. La taille de ce cette somme (le nombre de termes) varie avec n. Mais alors, comme on peut faire tendre n vers l'infini pour une suite, on pourrait donc parler de somme infinie ?

Oui et c'est ce qui permet de contredire un des paradoxes de Zénon d'Elée : imaginons-nous courrir un 100 mètres, nous allons d'abord parcourir 50 mètres, puis 25, puis $12,5$ et ainsi de suite en divisant à chaque fois la distance parcoure à l'étape précédente par deux. A chaque fois, la distance restante et égale à la distance parcoure et Zénon d'Elée dit que nous ne pouvons pas atteindre notre but !

Voyons de plus près avec une des sommes que nous savons le mieux manipuler : la somme des termes d'une suite géométrique.

En effet, en reprenant le problème, on peut écrire $u_1 = 50$ puis $u_2 = 25$ et $u_n = 50 \times \frac{1}{2^{n-1}}$

Notre distance parcourue après n « étapes » s'écrit donc

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k \text{ soit } S_n = \sum_{k=1}^{n} u_1 \frac{1}{2^{k-1}} = u_1 \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = 50\left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right), \text{ donc } \lim_{n\to+\infty} S_n = 100 \text{ car } \frac{1}{2^{n-1}} \to 0$$

On peut donc parcourir les 100 mètres et on écrira même $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 100$

1 Série, définition et convergence

1.1 Définition

<u>Définitions</u> : soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$$ 1) la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée **série de terme général** u_n 2) la série de terme général u_n est notée $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$, ou $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ 3) pour $n \in \mathbb{N}$, le nombre S_n est appelé **somme partielle d'indice** n de la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$	<u>Exemples</u> : **1.** soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite constante égale à 1 la série de terme général u_n est la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $S_n = n+1$ **2.** soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général $u_n = n$ la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est la suite $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ **2.** la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ est appelée série **harmonique**. Il n'existe pas de formule simple donnant la somme partielle S_n en fonction de n

Remarques :

▷ la suite $(u_n)_{n\geqslant p}$ peut n'être définie qu'à partir d'un certain rang p. Dans ce cas la série associée est la suite $(S_n)_{n\geqslant p}$ définie par : $\forall n \geqslant p, \quad S_n = \sum_{k=p}^{n} u_k$

Dans la pratique, p vaut généralement 0 ou 1

▷ une série est donc une suite, il est bon de le garder à l'esprit.

1.2 Convergence

<u>Définition</u> : soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la série de terme général u_n

1) on dit que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est **convergente** lorsque la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
Sa limite est alors appelée **somme** de la série, et elle se note $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$

On a alors : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} S_n$

2) si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas, on dira que la série est **divergente**.

3) déterminer la **nature** d'une série, c'est déterminer si elle est convergente ou divergente.

<u>Exemples</u> :

1. la série de terme général 1 est divergente.

2. La série de terme général $\frac{1}{2^n}$ est convergente puisque $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}$ et $\lim_{n\to\infty} S_n = 2$

3. La série $\sum_{n\geqslant 0} n$ est divergente, puisqu'il s'agit de la suite $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

4. La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$ est convergente, et $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$, en effet, $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, et par télescopage, $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$

<u>Remarques</u> :

▷ ⚠ la notation $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ n'a de sens que dans le cas où la série $\sum_{n} u_n$ est <u>convergente</u>. Cette notation désigne forcément un nombre réel **qui est une limite** ;

▷ par contre la notation $\sum_{n} u_n$ est toujours valable, car elle désigne la série de terme général u_n ;

▷ comme pour une suite, la nature d'une série ne dépend pas des premiers termes de celle-ci. La série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ sera convergente si et seulement si la série $\sum_{n\geqslant p} u_n$ est convergente (avec $p \in \mathbb{N}$).

Hyper important

La propriété ci-dessous est centrale dans ce chapitre. Si vous l'avez comprise, c'est que vous maitrisez en bonne partie le concept de série.
La non validité de la réciproque fait partie de ce « hyper important ».

<u>Propriété : condition nécessaire de convergence d'une série</u> : soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.

Si la série de terme général u_n **est convergente**, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge vers** 0.

<u>La réciproque est fausse.</u>

<u>Démonstration</u> : en posant $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, si la série converge, alors il existe un réel ℓ tel que $\lim_{n\to+\infty} S_n = \ell$
de plus, par propriété sur les suites $\lim_{n\to+\infty} S_{n-1} = \ell$, donc par opération $\lim_{n\to+\infty} (S_n - S_{n-1}) = \ell - \ell = 0$
or $S_n - S_{n-1} = \sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_n + \sum_{k=0}^{n-1} u_k - \sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_n$
donc nous avons montré que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

Exemples :

1. pour que la série $\sum_{n\geqslant 0} q^n$ soit convergente, il faut donc que $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$. On ne sait pas si cela suffit, mais si $|q| \geqslant 1$, alors $\sum_{n\geqslant 0} q^n$ ne converge pas
2. de non validité de la réciproque :
   - a. avec $u_n = \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ln(1) = 0$ par continuité de la fonction ln
     et pourtant $u_n = \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln(n)$
     donc les sommes partielles de la série de terme général u_n sont des sommes télescopiques :
     $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k)) = \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1)$
     donc $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ (bien que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ln(1) = 0$)
   - b. on verra que la série harmonique $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ est divergente, et pourtant $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$

Corollaire (immédiat) : si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui ne converge pas vers 0 alors, la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est divergente et, dans ce cas, on dit que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ **diverge grossièrement**.	Remarque : il s'agit de la contraposée de la propriété précédente. Exemple : soit u la suite définie par $u_n = (-1)^n$, alors la série $\sum u_n$ diverge grossièrement, en effet la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite.

1.3 Propriétés liées à la convergence

Propriétés - linéarité de la convergence : si les séries $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ sont convergentes, alors

1) la série $\sum_{n\geqslant 0} (u_n + v_n)$ est convergente et $\sum_{k=0}^{+\infty} (u_k + v_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k + \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$

2) si $\alpha \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n\geqslant 0} \alpha u_n$ est convergente et $\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha u_k = \alpha \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$

3) si $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, la série $\sum_{n\geqslant 0} (\alpha u_n + \beta v_n)$ est convergente et $\sum_{k=0}^{+\infty} (\alpha u_k + \beta v_k) = \alpha \sum_{k=0}^{+\infty} u_k + \beta \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$

Démonstration : c'est une conséquence des résultats sur les limites de suites et de la linéarité des sommes partielles : $\sum_{k=0}^{n} (u_k + v_k) = \sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{k=0}^{n} v_k$ et $\sum_{k=0}^{n} \alpha u_k = \alpha \sum_{k=0}^{n} u_k$ (puis on passe à la limite).

⚠ par contre les résultats sur les limites de produits ou de quotients de suites ne sont pas exploitables puisque $\sum_{k=0}^{n} (u_k \times v_k) \neq \left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right) \times \left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$ (de même pour le quotient)

Remarques :

▷ une conséquence immédiate (pour montrer la divergence d'une série)

si $\sum_{n} u_n$ est divergente et si $\sum_{n} v_n$ est convergente, alors $\sum_{n} (u_n + v_n)$ est divergente	Exemple : la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ avec $u_n = \dfrac{n+1}{n^2}$ est divergente

si elle était convergente, $\sum_n u_n$ le serait aussi car
$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n}(u_k+v_k) - \sum_{k=0}^{n} v_k$$

car $\dfrac{n+1}{n^2} = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}$ avec $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ qui diverge et $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n^2}$ qui converge.

▷ **attention**, il est possible par contre que $\sum_n (u_n+v_n)$ converge sans que ni $\sum_n u_n$, ni $\sum_n v_n$ ne converge (par exemple $u_n = 1$ et $v_n = -1$ ou typiquement dans le cas des sommes télescopiques).

Sur un exemple, méthode pour les « séries décalées » :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=3}^{n} \dfrac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2} - \dfrac{1}{1^2} - \dfrac{1}{2^2}$ donc la série $\sum_{n\geqslant 3} \dfrac{1}{n^2}$ converge et $\sum_{n=3}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} - \dfrac{5}{4}$

1.4 Séries télescopiques

Une somme télescopique ramène l'étude d'une série à celle d'une suite, plus précisément :

Propriété - séries télescopiques :
soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, alors :

1) la série télescopique $\sum_{n\geqslant 0}(u_{n+1}-u_n)$ est de même nature que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
2) si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ alors $\sum_{k=0}^{+\infty}(u_{k+1}-u_k) = \ell - u_0$

Démonstration : $\sum_{k=0}^{n}(u_{k+1}-u_k) = u_{n+1} - u_0$

Exemple : soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes dans $\mathbb{R}_+^*$ qui converge alors $\sum \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ est convergente si $\ell > 0$ et divergente sinon,
en effet, si $\ell > 0, u_n \to \ell \Rightarrow \ln(u_n) \to \ln(\ell)$ par continuité de la fonction ln, donc d'après la proposition, $\sum_n(\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n))$ est de même nature que la suite $(\ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge si $\ell > 0$,
de plus si $\ell > 0, \sum_{n=0}^{+\infty} \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln(\ell) - \ln(u_0)$

1.5 Séries à termes positifs

Dans ce paragraphe, on ne considère que des séries à termes réels positifs.

Propriété : soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes positifs et, pour $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$

1) la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge si et seulement si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée,
   c'est-à-dire si et seulement si
   $\exists M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant M$
2) si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée, alors la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ diverge vers $+\infty$

Exemple : montrons que la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ converge
pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}$, alors

1. (S_n) est à termes positifs,
2. de plus (S_n) est majorée, en effet, pour $n \geqslant 2$ et pour $k \in [\![2, n]\!]$, $\dfrac{1}{k^2} \leqslant \dfrac{1}{k(k-1)} = \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$
donc $S_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k^2} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n}\left(\dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}\right)$
or par télescopage $\sum_{k=2}^{n}\left(\dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}\right) = 1 - \dfrac{1}{n}$
donc $S_n \leqslant 1 + 1 - \dfrac{1}{n} = 2 - \dfrac{1}{n} \leqslant 2$

Démonstration : en effet, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, puisque $\forall n \in \mathbb{N}, S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geqslant 0$ donc, d'après le th. de la limite monotone : si elle est majorée, elle converge et sinon, elle diverge vers $+\infty$

Remarques :

▷ il s'agit simplement du théorème de la limite monotone appliqué à $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est croissante ;
▷ une série à termes positifs est donc, soit convergente, soit divergente vers $+\infty$;

▷ ce critère ne s'applique pas pour des séries dont les termes ne sont pas tous positifs,

par exemple la série $\sum_n (-1)^n$ est divergente pourtant : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \leqslant 1$

Propriété - théorème de comparaison : soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à termes positifs telles $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant v_n$ 1) si $\sum_n v_n$ converge alors $\sum_n u_n$ converge 2) si $\sum_n u_n$ diverge alors $\sum_n v_n$ diverge (vers $+\infty$)	Exemples : **1.** $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2+5}$ converge, car $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge et $\forall n \in \mathbb{N}^*, n^2+5 \geqslant n^2 \Rightarrow 0 \leqslant \frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2+5}$ **2.** $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge vers $+\infty$ car $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge et $\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geqslant \sqrt{n} \Rightarrow 0 \leqslant \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$

2 Séries absolument convergentes

Définition : on dit que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est **absolument convergente** lorsque la série (à termes positifs) $\sum_{n\geqslant 0} \lvert u_n\rvert$ est convergente.	Exemple : la série $\sum_n \frac{(-1)^n}{n^2}$ est absolument convergente car la série de terme général $1/n^2$ converge.
Propriété : si la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est absolument convergente, alors elle est convergente, de plus : $$\left\lvert \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \right\rvert \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \lvert u_k\rvert$$	Exemple : la série $\sum_n \frac{(-1)^n}{n^2}$ est convergente Remarque : **attention**, la réciproque est fausse, $\sum_n \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente, mais elle n'est pas absolument convergente (car $\sum_n \frac{1}{n}$ diverge).

3 Séries de référence

3.1 Séries géométriques et dérivées

Définition : une **série géométrique** est une série de la forme $\sum_n q^n$, où $q \in \mathbb{R}$	Remarque : on sait déjà exprimer les sommes partielles de ces séries : $\sum_{k=p}^{n} q^k = \frac{q^p - q^{n+1}}{1-q}$
Propriété : soit $q \in \mathbb{R}$ 1) la série $\sum_{n\geqslant 0} q^n$ est convergente $\Leftrightarrow q \in]-1,1[$ 2) lorsque $q \in]-1,1[$, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$	Exemple : avec $u_n = \frac{(-1)^n}{7^n}$, alors $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est convergente et $\sum_{n\geqslant 0}^{+\infty} u_n = \frac{1}{1-\frac{-1}{7}} = \frac{7}{8}$ (série géométrique de raison $q = -\frac{1}{7}$)
Propriété : les séries $\sum_{n\geqslant 1} nq^{n-1}$ et $\sum_{n\geqslant 2} n(n-1)q^{n-2}$ sont convergentes $\Leftrightarrow q \in]-1,1[$ dans ce cas, $\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}, \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$	Exemples : 1) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{3^{n-1}} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{9}{4}$ 2) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{2^n} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{2^{n-1}} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$ $= 1/2\,(1-1/2)^{-2} + 2 = 4$

Principe de la démonstration et moyen mnémotechnique : il s'agit d'une « dérivée » de l'égalité précédente : la dérivée de $x \to x^n$ est $x \to nx^{n-1}$ et la dérivée de $x \to \dfrac{1}{1-x}$ est $x \to \dfrac{1}{(1-x)^2}$
attention on ne dérive pas des sommes infinies, il s'agit juste de l'idée de la démonstration.

3.2 Série exponentielle

Définition : soit $x \in \mathbb{R}$, alors la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} \dfrac{x^n}{n!}$ est appelée **série exponentielle**	Remarque : pour $x = 0$, cela donne $\sum\limits_{n \geqslant 0} \dfrac{0^n}{n!}$ qui « vaut » $1 + 0 + 0 \cdots = 1 = e^0$
Propriété : pour tout nombre réel x, la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} \dfrac{x^n}{n!}$ est convergente, et $$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$	Exemple : pour $x = 1$, $\sum\limits_{n \geqslant 0} \dfrac{1^n}{n!} = \sum\limits_{n \geqslant 0} \dfrac{1}{n!}$ converge et $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{k!} = e^1 = e$ $\sum\limits_{n \geqslant 0} \dfrac{(-1)^n}{n!}$ est convergente et $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{k!} = e^{-1}$

3.3 Séries de Riemann

Pas au programme en première année, mais il est bon de connaitre le résultat de cette section.

Définition : on appelle **série de Riemann** toute série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n^\alpha}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$	Exemples : $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann, convergente comme nous l'avons vu plus haut.

Zoom sur une célébrité : la série harmonique $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ est une série de Riemann, et elle est divergente

pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$

par une étude de fonction, on montre que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln(x) \leqslant x - 1$, ainsi $\forall k \in \mathbb{N}^*, \ln\left(1 + \dfrac{1}{k}\right) \leqslant \dfrac{1}{k}$

donc en passant à la somme : $S_n \geqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \dfrac{1}{k}\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(\dfrac{k+1}{k}\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\ln(k+1) - \ln(k)\right)$

donc par télescopage, $S_n \geqslant \ln(n+1)$ et donc la suite $S_n \to +\infty$, i.e. la série harmonique est divergente.

Propriété - critère des séries de Riemann : soit $\alpha \in \mathbb{R}$, la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$	Exemple : la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ est divergente les séries $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$, $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n^7}$ sont convergentes.

Remarques : la série harmonique $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ est la série de Riemann « charnière » ;

et plus précisément pour $\alpha \leqslant 0$, la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n^\alpha}$ diverge grossièrement.

En résumé, il y a deux questions :

1. Est-ce qu'une série converge ? Soit on reconnait une série de référence ou une forme télescopique, sinon ce sont souvent des séries à termes positifs et il faut utiliser les théorèmes de la limite monotone ou de comparaison.
2. Que vaut la somme d'une série ? On utilise alors forcément les séries de référence (géométrique ou exponentielle) ou une simplification par télescopage.