Corrigé *Total sur 69,5 points*

Exercice 1 - vrai ou faux *1 point par question - total sur 5 points*

Indiquer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses en justifiant la réponse.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)^3}{x^2} = 0$ C'est vrai par croissance comparée (forme $\dfrac{(\ln(x))^\beta}{x^\alpha}$ avec $\alpha > 0$)

b) Soit la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{\ln(1+x)} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$ alors f est continue sur $\mathbb{R}$

C'est faux car $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{\ln(1+x)} = +\infty$ ce qui ne peut être égal à $f(0)$
en effet $\lim\limits_{x\to0^+} \ln(1+x) = \ln(1) = 0$ par continuité de ln et même $\lim\limits_{x\to0^+} \ln(1+x) = 0^+$ car $x > 0 \Rightarrow 1+x > 1$ donc $\ln(1+x) > 0$ (par croissance de ln) et on conclut par opération (inversion d'une limite nulle).

c) Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$, alors A est inversible

C'est faux car $\det A = 1 \times 6 - 2 \times 3 = 0$ donc A n'est pas inversible.

d) La série $\sum\limits_{n\geqslant0} \dfrac{n^2-5}{n^3+6}$ est grossièrement divergente. C'est faux car une série diverge grossièrement lorsque son terme général ne tend pas vers 0 or ici $\dfrac{n^2-5}{n^3+6} = \dfrac{n^2\left(1-\frac{5}{n^2}\right)}{n^3\left(1+\frac{6}{n^3}\right)} = \dfrac{1-\frac{5}{n^2}}{n\left(1+\frac{6}{n^3}\right)}$ et donc par opérations $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2-5}{n^3+6} = 0$

e) La série $\sum\limits_{n\geqslant0} \dfrac{9^n}{11}$ est divergente.

C'est vrai, on peut voir qu'elle est grossièrement divergente, car $\lim\limits_{n\to+\infty} 9^n = +\infty$($q^n$ avec $q > 1$) et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{9^n}{11} = +\infty$
ou remarquer qu'elle est proportionnelle à une série géométrique divergente ($q \geqslant 1$) car $\sum\limits_{n\geqslant0} \dfrac{9^n}{11} = \dfrac{1}{11} \sum\limits_{n\geqslant0} 9^n$

Exercice 2 - limites de fonctions et séries *4 points*

1. Déterminer les limites suivantes

a. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2-2x-8}{x+2}$ *1 point*

En remplaçant x par -2 dans l'expression on trouve une forme indéterminée de type « $\dfrac{0}{0}$ », ce qui nous oriente vers une factorisation par $x+2$ au numérateur, et on trouve en effet $x^2-2x-8=(x+2)(x-4)$

donc $\dfrac{x^2-2x-8}{x+2}=\dfrac{(x+2)(x-4)}{x+2}=x-4$ et donc $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2-2x-8}{x+2}=\lim\limits_{x \to -2} x-4=-6$

b. $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{4\ln\left(x+\frac{1}{2}\right)}{x}$ *1 point*

Il s'agit simplement d'un quotient de limite,

sachant que $\lim\limits_{x \to 0^-} 4\ln\left(x+\dfrac{1}{2}\right)=4\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)=-4\ln(2)$ (et $-4\ln(2)<0$) et que $\lim\limits_{x \to 0^-} x=0^-$

on trouve $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{4\ln\left(x+\frac{1}{2}\right)}{x}=+\infty$ (forme « $\dfrac{\ell}{0^-}$ » avec $\ell<0$)

2. Déterminer si les séries suivantes sont convergentes et si oui calculer leur(s) somme(s)

a. $\sum\limits_{n \geqslant 0}\left(e^{-n}-e^{-n-1}\right)$ *1 point*

On peut décomposer la série en deux séries géométriques, mais il est plus simple de reconnaitre une série télescopique, qui est alors de même nature que e^{-n} et donc convergente car $e^{-n} \to 0$

pour bien le mettre en évidence, on peut poser pour $n \in \mathbb{N}, u_n=e^{-n}$ et on a alors

$\sum\limits_{k=0}^{n}\left(e^{-k}-e^{-k-1}\right)=\sum\limits_{k=0}^{n}\left(e^{-k}-e^{-(k+1)}\right)=\sum\limits_{k=0}^{n}(u_k-u_{k+1})=u_0-u_{n+1}$ après télescopage

or $-(n+1) \to -\infty$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} e^X=0$ donc par composition $u_{n+1}=e^{-(n+1)} \to 0$

et donc $\sum\limits_{k=0}^{n}\left(e^{-k}-e^{-k-1}\right) \to u_0$ et $u_0=1$ donc la série $\sum\limits_{n \geqslant 0}\left(e^{-n}-e^{-n-1}\right)$ converge vers 1

b. $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{n}{7^n}$ *1 point*

Pour $n \in \mathbb{N}, \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k}{7^k}=\dfrac{1}{7}\sum\limits_{k=1}^{n} k\dfrac{1}{7^{k-1}}=\dfrac{1}{7}\sum\limits_{k=1}^{n} k\left(\dfrac{1}{7}\right)^{k-1}$

or $\sum\limits_{k=1}^{n} k\left(\dfrac{1}{7}\right)^{k-1}$ est une série géométrique (dérivée) convergente ($|q|=\dfrac{1}{7}<1$) et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\left(\dfrac{1}{7}\right)^{n-1}=\dfrac{1}{\left(1-\frac{1}{7}\right)^2}=\dfrac{7^2}{6^2}$

donc $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{n}{7^n}$ converge et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n}{7^n}=\dfrac{1}{7} \times \dfrac{7^2}{6^2}=\dfrac{7}{6^2}=\dfrac{7}{36}$

Exercice 3 - matrice et suites *6,5 points*

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$ *2 points*

Comme suggéré, on procède par récurrence, pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$

Initialisation : $P(0)$ est vraie $\Leftrightarrow A^0 = \begin{pmatrix} 2^0 & 0 & 3^0 - 2^0 \\ 0 & 3^0 & 0 \times 3^{0-1} \\ 0 & 0 & 3^0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow I_3 = I_3$

ce qui est vrai, donc $P(0)$ est vraie

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $P(n)$ est vraie

par hypothèse $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$ donc $A^{n+1} = A^n A = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

donc $A^{n+1} = \begin{pmatrix} 2^n \times 2 & 0 & 2^n + 3(3^n - 2^n) \\ 0 & 3^n \times 3 & 3^n + n3^{n-1} \times 3 \\ 0 & 0 & 3^n \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 & 3^{n+1} - 2^{n+1} \\ 0 & 3^{n+1} & (n+1)3^n \\ 0 & 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix}$

car $2^n + 3(3^n - 2^n) = 2^n + 3^{n+1} - 3 \times 2^n = 3^{n+1} - 2 \times 2^n = 3^{n+1} - 2^{n+1}$ et $3^n + n3^{n-1} \times 3 = 3^n + n3^n = (n+1)3^n$
donc $P(n+1)$ est vraie et donc par théorème de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ est vraie.

2. On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $a_0 = 2, b_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+1} = 2a_n + 3^n \quad \text{et} \quad b_{n+1} = 3b_n + 3^n$$

a. Compléter le programme ci-contre pour qu'il affiche la valeur de a_n *1 point*

On calcule les termes de manière itérative en partant de a_0 jusqu'à a_n (attention chaque terme dépend du précédent mais aussi de n du fait du terme 3^n).
Nota bene : tel quel le programme ne fonctionne pas, il faut définir n au préalable.

```
a=2
for i in range(1,n+1):
  a=2*a+3**(i-1)
print(a)
```

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ 3^n \end{pmatrix}$

b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = AX_n$ *1 point*

On calcule :

$AX_n = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_n + 3^n \\ 3b_n + 3^n \\ 3^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ 3^{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}$ d'après la définition ci-dessus.

c. Etablir que $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0$ *1 point*

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit l'assertion $Q(n) : X_n = A^n X_0$

Initiation : $P(0)$ est vraie $\Leftrightarrow X_0 = A^0 X_0 \Leftrightarrow X_0 = I_3 X_0 \Leftrightarrow X_0 = X_0$ ce qui est vrai donc $P(0)$ est vraie

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $P(n)$ est vraie
d'après la question précédente $X_{n+1} = AX_n$ et par hypothèse de récurrence, $X_n = A^n X_0$
donc $X_{n+1} = AA^n X_0 = A^{n+1} X_0$ c'est-à-dire que $P(n+1)$ est vraie
donc par théorème de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ est vraie et donc $X_n = A^n X_0$

d. En déduire en utilisant **1.** que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 2^n + 3^n$ et $b_n = n3^{n-1}$ puis déterminer les limites des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *1,5 points*

Par définition $X_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ 3^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et d'après **1.c.** $A^n X_0 = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 2^n + 3^n - 2^n \\ n3^{n-1} \\ 3^n \end{pmatrix}$

or $X_n = A^n X_0$ d'après la question précédente, donc $a_n = 2 \times 2^n + 3^n - 2^n = (2-1)2^n + 3^n = 2^n + 3^n$ et $b_n = n3^{n-1}$
d'après les limites usuelles (q^n avec $q > 1$) puis par addition $a_n \to +\infty$ et par opérations $b_n \to +\infty$ car $b_n = \dfrac{n3^n}{3}$

Problème 1

On considère la fonction $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout x de $]0,+\infty[$, par : $f(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}\ln(x)$ *30 points*

On admet les encadrements numériques suivants : $2,7 < \mathrm{e} < 2,8$ $\quad 7,3 < \mathrm{e}^2 < 7,4$ $\quad 0,6 < \ln(2) < 0,7$

Partie I : étude de la fonction f

12,5 points

1. Justifier que f est dérivable 2 fois sur $]0,+\infty[$ et calculer, pour tout x de $]0,+\infty[$, $f'(x)$ et $f''(x)$ *1 point*

Les fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^x$ et $x \mapsto \ln(x)$ sont dérivables sur l'intervalle $]0,+\infty[$ en tant que fonctions usuelles donc la fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$ et $\forall x \in]0,+\infty[, f'(x) = e^x - \dfrac{e}{x}$

f' est alors elle-même dérivable pour les même raisons, $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ étant dérivable sur $]0,+\infty[$

et $\forall x \in]0,+\infty[, f''(x) = e^x + \dfrac{e}{x^2}$

2. Dresser le tableau de variations de f' avec la limite de f' en 0 et la limite de f' en $+\infty$ et préciser $f'(1)$ *1,5 points*

Pour tout $x \in]0,+\infty\left[, f''(x) = \mathrm{e}^x + \dfrac{\mathrm{e}}{x^2} > 0\right.$

la fonction f' est donc strictement croissante sur $]0,+\infty[$

par ailleurs, $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^x = e^0 = 1$ (par continuité de $x \mapsto e^x$)

et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = -\infty$

de plus $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$

enfin $f'(1) = e^1 - \dfrac{e}{1} = 0$ d'où le tableau ci-contre

x	0		1		$+\infty$
f'	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3. Dresser le tableau de variations de f avec la limite de f en 0 et la limite de f en $+\infty$ et préciser $f(1)$ *2 points*

La fonction f' est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ ainsi $\forall x \in]0,1[, f'(x) < f'(1) = 0$ et $\forall x \in]1,+\infty[, f'(x) > f'(1) = 0$

donc f est strictement décroissante sur $]0,1]$ et strictement croissante sur $[1,+\infty[$

par ailleurs, déterminons la limite de f en 0 :

comme $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^x = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$, alors par addition $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$

déterminons alors la limite de f en $+\infty$: pour $x > 0, f(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}\ln(x) = \mathrm{e}^x\left(1 - \mathrm{e}\dfrac{\ln(x)}{\mathrm{e}^x}\right)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{\mathrm{e}^x} = 0$ par croissances comparées

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ par somme et produit et enfin $f(1) = \mathrm{e}^1 - \mathrm{e}\ln(1) = \mathrm{e}$, on peut alors établir le tableau suivant

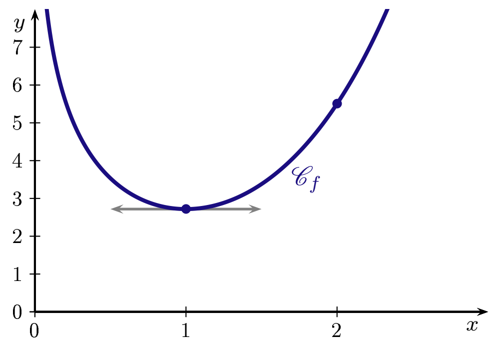
x	0		1		$+\infty$
f	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

4. Donner l'allure de la courbe représentative de f *1,5 points*

Le tableau de variations donne presque l'allure de f, il faut représenter la décroissance de f sur l'intervalle $]0,1]$, puis sa croissance sur l'intervalle $[1,+\infty[$

par ailleurs $f(1) = e$ et avec les valeurs données par l'énoncé, on peut trouver l'encadrement $5,3 < f(2) < 5,8$

enfin comme e^x prédomine « rapidement » sur $\ln(x)$, on peut présumer que f aura « rapidement » une croissance exponentielle.



5. Étudier les variations de la fonction $u :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $u(x) = f'(x) - x$ *2,5 points*

La fonction u est dérivable sur $]0,+\infty[$ car c'est la somme de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$ et

$\forall x > 0, u'(x) = f''(x) - 1 = \mathrm{e}^x + \dfrac{\mathrm{e}}{x^2} - 1 = \dfrac{x^2\mathrm{e}^x + \mathrm{e} - x^2}{x^2} = \dfrac{x^2\left(\mathrm{e}^x - 1\right) + \mathrm{e}}{x^2}$

comme $x^2 > 0$, on en déduit que le signe de $u'(x)$ est celui de $x^2\left(\mathrm{e}^x - 1\right) + \mathrm{e}$

or, $x > 0$ d'où $\mathrm{e}^x > \mathrm{e}^0 = 1$ et donc $\mathrm{e}^x - 1 > 0$, de plus, $x^2 > 0$ et $\mathrm{e} > 0$

d'où par produit, addition et quotient de termes positifs, $\forall x > 0, u'(x) > 0$ donc la fonction u est donc strictement

croissante sur $]0,+\infty[$
par ailleurs, d'après **2.** $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$ d'où $\lim\limits_{x\to 0} u(x) = -\infty$
déterminons alors la limite de f en $+\infty$: pour $x \in]0,+\infty[$, on a $u(x) = \mathrm{e}^x - \dfrac{\mathrm{e}}{x} - x = \mathrm{e}^x\left(1 - \dfrac{\mathrm{e}}{x\mathrm{e}^x} - \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}\right)$
et par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$, de plus $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}}{x\mathrm{e}^x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$, d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = +\infty$

6. En déduire que l'équation $f'(x) = x$, d'inconnue $x \in]\,0,+\infty[$, admet une solution et une seule, notée α, et montrer : $1 < \alpha < 2$ *2,5 points*

Soit $x \in]0,+\infty[$, $f'(x) = x \Leftrightarrow f'(x) - x = 0 \Leftrightarrow u(x) = 0$
on cherche donc à montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0,+\infty[$
la fonction u est continue sur $]0,+\infty[$ (par opération car f' et $x \mapsto x$ le sont) et strictement croissante sur $]0,+\infty[$)
donc, d'après le théorème de la bijection :
la fonction u réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $]\lim\limits_{x\to 0} u(x), \lim\limits_{x\to+\infty} u(x)[=]-\infty,+\infty[=\mathbb{R}$
or $0 \in \mathbb{R}$ donc l'équation $u(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x$ admet une unique solution α sur $]0,+\infty[$
par ailleurs $u(1) = f'(1) - 1 = 0 - 1 = -1 < 0$ et $u(2) = f'(2) - 2 = \mathrm{e}^2 - \dfrac{\mathrm{e}}{2} - 2$
or, d'après les encadrements donnés par l'énoncé,
on a $e^2 > 7,3$ et $\dfrac{e}{2} < 1,4$ donc $\dfrac{e}{2} + 2 < 4,4$ donc $e^2 > \dfrac{e}{2} + 2$ soit $e^2 - \dfrac{e}{2} - 2 > 0$ i.e. $u(2) > 0$
finalement $u(1) < 0$ et $u(2) > 0$ avec u continue, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $u(x) = 0$ admet une solution sur l'intervalle $[1;2]$
or α est l'unique solution de cette équation sur $]0,+\infty[$ donc $\alpha \in [1;2]$ et même $\alpha \in]1;2[$ car $u(1) \neq 0$ et $u(2) \neq 0$

Option B : avec les mêmes calculs on obtient $u(1) < u(\alpha) < u(2)$
or, par propriété u étant strictement croissante et continue, alors $u^{-1} : \mathbb{R} \to]0,+\infty[$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
puis en appliquant u^{-1}, on obtient alors $1 < \alpha < 2$

7. Ecrire un programme Python qui permet de déterminer une valeur approchée de α à 10^{-5} près. *1,5 points*

Après avoir importé numpy pour la fonction exponentielle, il s'agit d'un algorithme de dichotomie classique, avec une fonction croissante ici, on peut renvoyer comme résultat le dernier intervalle $[a,b]$ trouvé ou le dernier « milieu » calculé.

```
import numpy as np
a=1
b=2
while (b-a)>10**(-5):
  m=(a+b)/2
  if np.exp(m)-np.e/m-m>0 :
    b=m
  else :
    a=m
print([a,b])
```

Partie II : étude d'une suite, étude d'une série

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ *17,5 points*

1. Ecrire un programme Python permettant de calculer et de représenter graphiquement les 100 premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *1,5 points*

Programme classique, on calcule de manière itérative les termes de la suite et on les inclut progressivement dans une liste avec append pour pouvoir les représenter ensuite.
Pour la représentation, il n'est pas nécessaire ici de définir une liste d'abscisses, car par défaut, les abscisses seront : $0, 1, 2, ..., 99$

```
import numpy as np
u=2
L=[2]
for i in range(1,100):
    u=np.exp(u) -np.e*np. log(u)
    L.append(u)
plt.plot(L, '+')
plt.show()
```

2. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}, u_n$ existe et $u_n \geqslant 2$ *1 point*

Rar récurrence, évidemment ! Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $P(n) : u_n$ existe et $u_n \geqslant 2$

Initialisation : $u_0 = 2$ donc u_0 existe et $u_0 \geqslant 2$, i.e. $P(0)$ est vraie

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $P(n)$ est vraie
par hypothèse $u_n \geqslant 2$ donc $f(u_n)$ est bien définie et d'après l'étude de f à la question **I.3.** $f(u_n) \geqslant e$, et a fortiori $f(u_n) \geqslant 2$ i.e. $u_{n+1} \geqslant 2$ donc $P(n+1)$ est vraie, d'où l'hérédité
donc par théorème de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ est vraie, i.e. u_n existe et $u_n \geqslant 2$

3. Etudier les variations, puis le signe, de la fonction g : $\begin{array}{rcl} [2,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x)-x \end{array}$ *2 points*

Par définition de g, elle est dérivable (différence de fonctions dérivables) et
$\forall x \geqslant 2, g'(x) = f'(x) - 1$
or d'après la question **I.2.** f' est croissante, donc $\forall x \geqslant 2, f'(x) \geqslant f'(2)$
et $f'(x) = e^x - \dfrac{e}{x} \Rightarrow f'(2) - 1 = e^2 - \dfrac{e}{2} - 1$
de plus, d'après les valeurs données par l'énoncé $e^2 > 7,3 > 2,4 > \dfrac{e}{2} + 1$ donc $e^2 - \dfrac{e}{2} - 1 > 0$ i.e. $f'(2) - 1 > 0$
donc $f'(2) > 1$ et donc $\forall x \geqslant 2, f'(x) > f'(2) > 1$ donc $f'(x) - 1 > 0$ i.e. $g'(x) > 0$ donc g est (strictement) croissante
enfin $g(2) = f(2) - 2 = e^2 - e\ln(2) - 2$ et d'après les valeurs données par l'énoncé :
d'une part $\ln(2) \leqslant 1 \Rightarrow e\ln(2) \leqslant e \leqslant 3$ donc $e\ln(2) + 2 \leqslant 5$
d'autre part $e^2 \geqslant 7$ donc $e^2 > e\ln(2) + 2$ soit $e^2 - e\ln(2) - 2 > 0$ i.e. $g(2) > 0$
donc, g étant croissante, $\forall x \geqslant 2, g(x) > 0$

4. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. *1 point*

D'après **II.2.**, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant 2$
et d'après **II.3.**, $\forall x \geqslant 2, f(x) - x \geqslant 0$
donc $\forall n \in \mathbb{N}, f(u_n) - u_n \geqslant 0$ i.e. $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ et donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

5. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet $+\infty$ pour limite. *2 points*

Raisonnement par l'absurde classique : supposons que la $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit majorée
alors, étant croissante (d'après **II.4**), d'après le théorème de limite monotone, elle converge et on note alors ℓ sa limite
tout d'abord, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant 2 \Rightarrow \ell \geqslant 2$ par passage à la limite dans l'inégalité
par ailleurs, par continuité de $f, u_n \to \ell \Rightarrow f(u_n) \to f(\ell)$
de plus par propriété, $u_n \to \ell \Rightarrow u_{n+1} \to \ell$
or $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ donc par unicité de la limite, $f(\ell) = \ell$ i.e. $f(\ell) - \ell = 0$
autrement dit $g(\ell) = 0$ (avec $\ell \geqslant 2$), ce qui est contradictoire, car d'après **II.3.**, $\forall x \geqslant 2, g(x) > 0$
donc notre hypothèse de départ est fausse, i.e. la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée
comme elle est toujours croissante, d'après le théorème de limite monotone, elle diverge vers $+\infty$

6. Avec Python, définir une fonction qui, pour un réel A, renvoie le premier entier naturel N tel que $u_N \geqslant A$ *1,5 points*

Il s'agit d'une question classique de dépassement de seuil, qui oriente donc vers l'utilisation d'une boucle `while`, que l'on intègre ici dans une fonction pour répondre à la question. On calcule donc les termes de la suite de manière itérative dans la boucle (comme plus haut), en incrémentant le rang de la suite.

```python
def seuil(A):
  u=2
  n=0
  while u<A:
    u=np.exp(u)-np.e*np.log(u)
    n=n+1
  return n
```

7. Démontrer : $\forall x \in \Big[2,+\infty\Big[, 2\ln(x) \leqslant x \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^x}{3}$ *3 points*

On va démontrer séparément les deux parties de l'inégalité, en passant à chaque fois par l'étude d'une fonction
pour $x \in\in [2,+\infty[$, on pose $h(x) = x - 2\ln(x)$ et $i(x) = \dfrac{e^x}{3} - x$ alors h et i sont dérivables et
$\forall x \in [2,+\infty[, h'(x) = 1 - \dfrac{2}{x}$ et $i'(x) = \dfrac{e^x}{3} - 1 = \dfrac{e^x - 3}{3}$
<u>étude de h</u> : or $x \geqslant 2 \Rightarrow \dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{2}$ car la fonction inverse est décroissante sur $]0,+\infty[$
donc $\dfrac{2}{x} \leqslant 1$ puis $-\dfrac{2}{x} \geqslant -1$ et enfin $1 - \dfrac{2}{x} \geqslant 0$ i.e. $h'(x) \geqslant 0$ donc h est croissante et donc $\forall x \in [2,+\infty[, h(x) \geqslant h(2)$
or $h(2) = 2 - 2\ln(2)$ et $2\ln(2) < 1,4$ d'après les données de l'énoncé, donc $h(2) \geqslant 0$
et donc $\forall x \in [2,+\infty[, h(x) \geqslant 0$ i.e. $x \geqslant 2\ln(x)$ d'où la première partie de l'inégalité
<u>étude de i</u> : $x \geqslant 2 \Rightarrow e^x \geqslant e^2$ par croissance de l'exponentielle
or d'après les données de l'énoncé, $e^2 \geqslant 3$ donc pour $x \geqslant 2, e^x \geqslant 3$ donc $e^x - 3 \geqslant 0$ donc $i'(x) \geqslant 0$ i.e. la fonction i est croissante donc $\forall x \in [2,+\infty[, i(x) \geqslant i(2)$
or $i(2) = \dfrac{e^3}{3} - 2$ et par croissance de l'exponentielle, $e^3 \geqslant e^2$ et d'après les données de l'énoncé, $e^2 \geqslant 6$ donc $\dfrac{e^3}{3} \geqslant \dfrac{e^2}{3} \geqslant 2$
et donc $\dfrac{e^3}{3} - 2 \geqslant 0$ i.e. $i(2) \geqslant 0$ donc $\forall x \in [2,+\infty[, i(x) \geqslant 0$ i.e. $\dfrac{e^x}{3} \geqslant x$ d'où l'autre partie de l'inégalité
finalement $\forall x \in [2,+\infty[, 2\ln(x) \leqslant x$ et $x \leqslant \dfrac{e^x}{3}$ donc $\forall x \in [2,+\infty[, 2\ln(x) \leqslant x \leqslant \dfrac{e^x}{3}$

8. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geqslant \dfrac{6-\mathrm{e}}{2}u_n$ *1 point*

Soit $n \in \mathbb{N}$, par définition, $u_{n+1} = f(u_n) = e^{u_n} - e\ln(u_n)$, de plus $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant 2$
or d'après la question précédente (car $u_n \geqslant 2$) d'une part $\dfrac{e^{u_n}}{3} \geqslant u_n$ d'autre part $2\ln(u_n) \leqslant u_n$
donc $e^{u_n} \geqslant 3u_n$ et $-\ln(u_n) \geqslant -\dfrac{u_n}{2}$ puis $-e\ln(u_n) \geqslant -\dfrac{eu_n}{2}$
donc en additionnant les inégalités,
$e^{u_n} - e\ln(u_n) \geqslant 3u_n - \dfrac{eu_n}{2}$ donc $e^{u_n} - e\ln(u_n) \geqslant \dfrac{6u_n - eu_n}{2}$ soit $e^{u_n} - e\ln(u_n) \geqslant \dfrac{(6-e)u_n}{2}$ i.e. $u_{n+1} \geqslant \dfrac{6-e}{2}u_n$

9. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant 2\left(\dfrac{6-\mathrm{e}}{2}\right)^n$, puis retrouver le résultat de la question **5.** *2 points*

Du grand classique, par récurrence ! Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $P(n) : u_n \geqslant 2\left(\dfrac{6-\mathrm{e}}{2}\right)^n$

<u>Initialisation</u> : $P(0)$ est vraie $\Leftrightarrow u_0 \geqslant 2\left(\dfrac{6-\mathrm{e}}{2}\right)^0 \Leftrightarrow u_0 \geqslant 2 \times 1$
ce qui est vrai car $u_0 = 2$, donc $P(0)$ est vraie
<u>Hérédité</u> : soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $P(n)$ est vraie
par hypothèse $u_n \geqslant 2\left(\dfrac{6-\mathrm{e}}{2}\right)^n$ donc $\left(\dfrac{6-\mathrm{e}}{2}\right)u_n \geqslant 2\left(\dfrac{6-\mathrm{e}}{2}\right)\left(\dfrac{6-\mathrm{e}}{2}\right)^n$ i.e. $\left(\dfrac{6-\mathrm{e}}{2}\right)u_n \geqslant 2\left(\dfrac{6-\mathrm{e}}{2}\right)^{n+1}$
or d'après la question précédente $u_{n+1} \geqslant \left(\dfrac{6-\mathrm{e}}{2}\right)u_n$ donc $u_{n+1} \geqslant 2\left(\dfrac{6-\mathrm{e}}{2}\right)^{n+1}$ i.e. $P(n+1)$ est vraie, d'où l'hérédité
donc par théorème de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ est vraie

par ailleurs, d'après les données de l'énoncé $e < 3 \Rightarrow -e > -3$ donc $6 - e > 3$ donc $\dfrac{6-e}{2} > \dfrac{3}{2} > 1$
donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{6-\mathrm{e}}{2}\right)^n = +\infty$ (forme q^n avec $q > 1$) donc par par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} 2\left(\dfrac{6-\mathrm{e}}{2}\right)^n = +\infty$
et donc par théorème des gendarmes (version infinie), on retrouve $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

10. Justifier que que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\left(\dfrac{2}{6-\mathrm{e}}\right)^n$ converge *1 point*

D'après la question précédente, $\left(\dfrac{6-\mathrm{e}}{2}\right) > 1$ donc $0 < \left(\dfrac{2}{6-\mathrm{e}}\right) < 1$ car la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$
donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\left(\dfrac{2}{6-\mathrm{e}}\right)^n$ converge car il s'agit d'une série géométrique (forme $\sum\limits_{n\geqslant 0} q^n$) avec $|q| < 1$

11. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{1}{u_n}$ converge *1,5 points*

D'après la question **II.9.**, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant 2\left(\dfrac{6-\mathrm{e}}{2}\right)^n$ (et $u_n > 0$) donc $0 \leqslant \dfrac{1}{u_n} \leqslant \dfrac{1}{2\left(\frac{6-\mathrm{e}}{2}\right)^n}$ car la fonction inverse est décroissante sur $]0, +\infty[$ soit $0 \leqslant \dfrac{1}{u_n} \leqslant \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{6-\mathrm{e}}\right)^n$
or d'après la question précédente, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\left(\dfrac{2}{6-\mathrm{e}}\right)^n$ converge donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{6-\mathrm{e}}\right)^n$ converge par opération sur les séries convergentes
donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{1}{u_n}$ converge d'après le théorème de comparaison sur les séries à termes positifs

Problème 2 *24 points*

Partie A - puissances d'une matrice

On définit les matrices $M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $Q = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ *7,5 points*

1. Calculer PQ, que peut-on en déduire ? *1,5 points*

$$PQ = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2-(-2) & 2-2 & 2-2 \\ 1-1 & 1+1+2 & 1+1-2 \\ 1-1 & 1+1-2 & 1+1+2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = I_3$$

donc P est inversible et $P^{-1} = Q$

2. On définit la matrice D par $D = P^{-1}MP$, déterminer la matrice D *1,5 points*

On s'attend à ce que D soit une matrice diagonale et comme $Q = P^{-1}$, $D = QMP$:

$$D = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2}{3}+\frac{2}{3} & \frac{2}{3}+\frac{2}{3} & \frac{2}{3}-\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{4}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \frac{4}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3} & \frac{4}{3}-\frac{2}{3}-\frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{4}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3} & -\frac{4}{3}-\frac{2}{3}-\frac{2}{3} & 0 \\ \frac{4}{3}-\frac{4}{3} & -\frac{4}{3}+\frac{4}{3} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \frac{8}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{8}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Montrer que $M = PDP^{-1}$ *1 point*

Il faut inverser la formule qui définit D :
$D = P^{-1}MP \Rightarrow PD = PP^{-1}MP \Rightarrow PD = I_3MP \Rightarrow PD = MP \Rightarrow PDP^{-1} = MPP^{-1} \Rightarrow PDP^{-1} = MI_3 = M$

4. Montrer que, pour tout entier naturel $n, M^n = PD^nP^{-1}$ *1,5 points*

On procède par récurrence, pour $n \in \mathbb{N}$, on définit l'assertion $P(n)$: $M^n = PD^nP^{-1}$

<u>Initialisation</u> : $P(0)$ est vraie $\Leftrightarrow M^0 = PD^0P^{-1} \Leftrightarrow I_3 = PI_3P^{-1}$
ce qui est le cas car $PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3$ donc $P(0)$ est vraie

<u>Hérédité</u> : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $P(n)$ vraie
donc par hypothèse $M^n = PD^nP^{-1}$
donc $M^{n+1} = M^n \times M = PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^nI_3DP^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$ i.e. $P(n+1)$ est vraie
donc par théorème de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ est vraie, i.e. $M^n = PD^nP^{-1}$

5. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer D^n *0,5 point*

Par propriété sur les matrices diagonales : $\forall n \in \mathbb{N}^*, D^n = \operatorname{Diag}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n, \left(-\frac{2}{3}\right)^n, 0\right)$ et $D^0 = I_3$

6. Déterminer, pour tout entier naturel n, la première colonne de la matrice M^n *1,5 points*

$M^n = PD^nP^{-1}$ et on cherche à calculer la première colonne de M^n donc il suffit de calculer la première colonne de D^nP^{-1}, $D^nP^{-1} = \begin{pmatrix} \left(\frac{2}{3}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{2}{3}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots \\ -1 & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \left(\frac{2}{3}\right)^n & \dots & \dots \\ -\left(-\frac{2}{3}\right)^n & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots \end{pmatrix}$

$$\text{donc } M^n = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \left(\frac{2}{3}\right)^n & \dots & \dots \\ -\left(-\frac{2}{3}\right)^n & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2\times\left(\frac{2}{3}\right)^n + 2\times\left(-\frac{2}{3}\right)^n & \dots & \dots \\ \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(-\frac{2}{3}\right)^n & \dots & \dots \\ \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(-\frac{2}{3}\right)^n & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Partie B - étude d'une expérience aléatoire

On dispose de trois urnes : *16,5 points*

- l'urne 1 contient trois boules numérotées de 1 à 3
- l'urne 2 contient deux boules numérotées 1 et une boule portant le numéro 2
- l'urne 3 contient deux boules numérotées 1 et une boule portant le numéro 3

On effectue des tirages successifs avec remise d'une boule dans ces urnes selon le protocole suivant :

- le premier tirage s'effectue dans l'urne 1
- à l'issue de chaque tirage, on décide de faire le tirage suivant dans l'urne portant le numéro de la boule tirée. Ainsi, si la boule tirée au troisième tirage porte le numéro 2, alors le quatrième tirage se fait dans l'urne 2.

On définit, pour chaque entier $k \geqslant 1$, les événements suivants :

▷ A_k : « le $k^{\text{ème}}$ tirage amène une boule portant le numéro 1 »
▷ B_k : « le $k^{\text{ème}}$ tirage amène une boule portant le numéro 2 »
▷ C_k : « le $k^{\text{ème}}$ tirage amène une boule portant le numéro 3 »

Et on note, pour chaque entier $k \geqslant 1, a_k = P(A_k), b_k = P(B_k)$ et $c_k = P(C_k)$

1. a. Déterminer, en justifiant, les valeurs des probabilités a_1, b_1 et c_1 *0,5 point*

Le premier tirage s'effectue dans l'urne 1 dans laquelle on peut tirer de manière équiprobable une boule n°1, une boule n°2 ou une boule n°3, donc $a_1 = b_1 = c_1 = \dfrac{1}{3}$

b. Déterminer la valeur de b_2, en justifiant. *1,5 points*

A_1, B_1, C_1 forment un système complet d'événements, donc d'après la formule des probabilités totales :
$P(B_2) = P(A_1)P_{A_1}(B_2) + P(B_1)P_{B_1}(B_2) + P(C_1)P_{C_1}(B_2)$
or $P(A_1) = P(B_1) = P(C_1) = \dfrac{1}{3}$ (comme vu au **1.a)**, il y a autant de chances de tirer chacun des numéros au premier tirage et donc de choisir chacune des urnes au deuxième
or d'après les hypothèses, $P_{A_1}(B_2) = \dfrac{1}{3}$ (car le deuxième tirage a alors lieu dans l'urne 1)
de même $P_{B_1}(B_2) = \dfrac{1}{3}$ (tirage dans l'urne 2) et $P_{C_1}(B_2) = 0$ (tirage dans l'urne 3)
donc $P(B_2) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{9}$

c. A l'issue du deuxième tirage, on constate que la boule tirée porte le numéro 2. Déterminer la probabilité que le premier tirage ait amené la boule numéro 2. *1 point*

On cherche $P_{B_2}(B_1)$ et on utilise la formule de Bayes : $P_{B_2}(B_1) = \dfrac{P(B_1)P_{B_1}(B_2)}{P(B_2)} = \dfrac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}}{\frac{2}{9}} = \dfrac{1}{2}$

2. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note U_k la matrice-colonne suivante : $\begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix}$

a. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, donner en les justifiant les probabilités $P_{A_k}(A_{k+1}), P_{B_k}(A_{k+1})$ et $P_{C_k}(A_{k+1})$ *1,5 points*
En déduire que $a_{k+1} = \dfrac{1}{3}a_k + \dfrac{2}{3}b_k + \dfrac{2}{3}c_k$

$P_{A_k}(A_{k+1}) = \dfrac{1}{3}$ car le tirage s'effectue alors dans l'urne 1 où il y a une boule n°1 sur les trois,
$P_{B_k}(A_{k+1}) = \dfrac{2}{3}$ car le tirage s'effectue alors dans l'urne 2 où il y a deux boules n°1 sur les trois et
$P_{C_k}(A_{k+1}) = \dfrac{2}{3}$ car le tirage s'effectue alors dans l'urne 3 où il y a deux boules n°1 sur les trois.
puis par le même raisonnement qu'au **1.b)**, A_k, B_k, C_k forment un système complet d'événements, donc d'après la formule des probabilités totales :

$P(A_{k+1}) = P(A_k)P_{A_k}(A_{k+1}) + P(B_k)P_{B_k}(A_{k+1}) + P(C_k)P_{C_k}(A_{k+1})$
or $P(A_{k+1}) = a_{k+1}, P(A_k) = a_k, P(B_k) = b_k$ et $P(C_k) = c_k$ et d'après le début de la question,
on trouve $a_{k+1} = \frac{1}{3}a_k + \frac{2}{3}b_k + \frac{2}{3}c_k$

b. De la même manière, déterminer, pour $k \in \mathbb{N}^*$, les expressions de b_{k+1} et c_{k+1} en fonction de a_k, b_k et c_k *1 point*

De manière analogue, on trouve $P_{A_k}(A_{k+1}) = \frac{1}{3}, P_{B_k}(A_{k+1}) = \frac{1}{3}, P_{C_k}(A_{k+1}) = 0$
et $P(B_{k+1}) = P(A_k)P_{A_k}(B_{k+1}) + P(B_k)P_{B_k}(B_{k+1}) + P(C_k)P_{C_k}(B_{k+1})$ (probabilités totales)
donc $b_{k+1} = \frac{1}{3}a_k + \frac{1}{3}b_k$ et de même $c_{k+1} = \frac{1}{3}a_k + \frac{1}{3}c_k$

c. Déterminer la matrice A de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, telle que, pour tout entier naturel k non nul, $U_{k+1} = AU_k$ *1 point*

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, par définition $U_{k+1} = \begin{pmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \\ c_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}a_k + \frac{2}{3}b_k + \frac{2}{3}c_k \\ \frac{1}{3}a_k + \frac{1}{3}b_k + 0 \times c_k \\ \frac{1}{3}a_k + 0 \times b_k + \frac{1}{3}c_k \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} a_k + 2b_k + 2c_k \\ a_k + b_k + 0c_k \\ a_k + 0b_k + c_k \end{pmatrix}$ d'après **2.a)** et **2.b)**, donc $U_{k+1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix} = AU_k$ avec $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. On pose $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

a. Vérifier que $U_1 = AU_0$ *0,5 point*

Par définition, $U_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et $AU_0 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$
donc $U_1 = AU_0$

b. Montrer alors que pour tout k de $\mathbb{N}$, on a $U_k = A^kU_0$ *1,5 points*

On procède par récurrence ! Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit $P(k) : U_k = A^kU_0$

Initialisation : $A^0U_0 = I_3U_0 = U_0$ donc $P(0)$ est vraie

Hérédité : soit $k \in \mathbb{N}$, on suppose que $P(k)$ est vraie
d'après **2.c.** $U_{k+1} = AU_k$ et par hypothèse $U_k = A^kU_0$
donc $U_{k+1} = AA^kU_0 = A^{k+1}U_0$, i.e. $P(k+1)$ est vraie, d'où l'hérédité
donc par théorème de récurrence, $\forall k \in \mathbb{N}, P(k)$ est vraie, i.e. $U_k = A^kU_0$

c. Vérifier que $A = M + \frac{1}{3}I_3$ *0,5 point*

$$M + \frac{1}{3}I_3 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A$$

d. Montrer par récurrence que, pour tout k de $\mathbb{N}$, $A^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} M^j$ *2,5 points*

Question difficile : comme suggéré, pour $k \in \mathbb{N}$, on définit $P(k) : A^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} M^j$

Initialisation : $A^0 = I_3$ et $\sum_{j=0}^{0} \binom{0}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{0-j} M^j = \binom{0}{0} \left(\frac{1}{3}\right)^{0} M^0 = 1 \times 1 \times I_3$ donc $P(0)$ est vraie

Hérédité : soit $k \in \mathbb{N}$, on suppose que $P(k)$ est vraie

$A^{k+1} = A^k A$ or $A = M + \frac{1}{3}I_3$ et par hypothèse $A^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} M^j$

donc $A^{k+1} = \left(\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} M^j\right)\left(M + \frac{1}{3}I_3\right) = \left(\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} M^j\right) M + \frac{1}{3}\left(\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} M^j\right) I_3$

donc $A^{k+1} = \left(\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} M^j M\right) + \frac{1}{3}\left(\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} M^j I_3\right)$

donc $A^{k+1} = \left(\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} M^{j+1}\right) + \frac{1}{3}\left(\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} M^j\right) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} M^{j+1} + \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j+1} M$

or $\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} M^{j+1} = \sum_{i=1}^{k+1} \binom{k}{i-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-(i-1)} M^i$ (changement d'indice $i = j+1$)

donc $\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} M^{j+1} = \sum_{i=1}^{k+1} \binom{k}{i-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-i+1} M^i$

donc $A^{k+1} = \sum_{i=1}^{k+1} \binom{k}{i-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-i+1} M^i + \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j+1} M^j$

donc $A^{k+1} = \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-i+1} M^i + \binom{k}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^{0} M^{k+1} + \binom{k}{0} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-0+1} M^0 + \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j+1} M^j$

donc $A^{k+1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1} I_3 + \sum_{j=1}^{k} \left(\binom{k}{j-1} + \binom{k}{j}\right) \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j+1} M^j + M^{k+1}$

or d'après la formule de Pascal, pour tous entiers j et k tels que $1 \leqslant j \leqslant k$, $\binom{k}{j-1} + \binom{k}{j} = \binom{k+1}{j}$

donc $A^{k+1} = \binom{k+1}{0} \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1} M^0 + \sum_{j=1}^{k} \binom{k+1}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1-j} M^j + \binom{k+1}{k+1} \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1-(k+1)} M^{k+1}$

donc $A^{k+1} = \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1-j} M^j$, donc $P(k+1)$ est vraie, d'où l'hérédité

donc par théorème de récurrence, $\forall k \in \mathbb{N}, P(k)$ est vraie.

4. **a.** Simplifier en fonction de k les sommes $S_k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{2}{3}\right)^j \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j}$ et $T_k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(-\frac{2}{3}\right)^j \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j}$ *1 point*

Il s'agit simplement d'appliquer la formule du binôme de Newton : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, (a+b)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} a^j b^{k-j}$ donc

$S_k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{2}{3}\right)^j \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} = \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right)^k = 1^k = 1$ et $T_k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(-\frac{2}{3}\right)^j \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} = \left(-\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right)^k = \left(-\frac{1}{3}\right)^k$

b. En déduire les 3 éléments de la première colonne de la matrice A^k *1,5 points*

D'après **3.d)** et **A 6.**, puis par propriétés sur les opérations de matrices,

$$A^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^j + 2 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^j & \dots \\ \left(\frac{2}{3}\right)^j - \left(-\frac{2}{3}\right)^j & \dots \\ \left(\frac{2}{3}\right)^j - \left(-\frac{2}{3}\right)^j & \dots \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} \left(2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^j + 2 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^j\right) & \dots \\ \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} \left(\left(\frac{2}{3}\right)^j - \left(-\frac{2}{3}\right)^j\right) & \dots \\ \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} \left(\left(\frac{2}{3}\right)^j - \left(-\frac{2}{3}\right)^j\right) & \dots \end{pmatrix}$$

donc $A^k = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 2\displaystyle\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\left(\frac{2}{3}\right)^j\left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} + 2\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\left(-\frac{2}{3}\right)^j\left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} & \dots & \dots \\ \displaystyle\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\left(\frac{2}{3}\right)^j\left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} - \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\left(\frac{2}{3}\right)^j\left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} & \dots & \dots \\ \displaystyle\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\left(-\frac{2}{3}\right)^j\left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} - \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\left(-\frac{2}{3}\right)^j\left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} & \dots & \dots \end{pmatrix} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 2+2\left(-\frac{1}{3}\right)^k & \dots \\ 1-\left(-\frac{1}{3}\right)^k & \dots \\ 1-\left(-\frac{1}{3}\right)^k & \dots \end{pmatrix}$

en reconnaissant S_k et T_k calculés précédemment

c. Vérifier alors que pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a $a_k = \dfrac{1}{2}\left(1+\left(-\dfrac{1}{3}\right)^k\right)$ et $b_k = c_k = \dfrac{1}{4}\left(1-\left(-\dfrac{1}{3}\right)^k\right)$ *1 point*

D'après **3.b.**, $U_k = A^k U_0$,

c'est-à-dire que U_k est égal à la première colonne de A car $U_0 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ donc $U_k = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 2+2\left(-\frac{1}{3}\right)^k \\ 1-\left(-\frac{1}{3}\right)^k \\ 1-\left(-\frac{1}{3}\right)^k \end{pmatrix}$ et $U_k = \begin{pmatrix}a_k\\b_k\\c_k\end{pmatrix}$

donc on en déduit $a_k = \dfrac{1}{4}\left(2+2\left(-\dfrac{1}{3}\right)^k\right) = \dfrac{1}{2}\left(1+\left(-\dfrac{1}{3}\right)^k\right)$, $b_k = \dfrac{1}{4}\left(1-\left(-\dfrac{1}{3}\right)^k\right)$ et $c_k = \dfrac{1}{4}\left(1-\left(-\dfrac{1}{3}\right)^k\right)$

d. Calculer les limites de a_k, b_k et c_k et interpréter les résultats. *1,5 points*

D'après les limites de suites géométriques $\left(-\dfrac{1}{3}\right)^k \to 0$ car $\left|-\dfrac{1}{3}\right| < 1$ donc par opérations $a_k \to \dfrac{1}{2}$, $b_k = c_k \to \dfrac{1}{4}$
ce qui signifie que quand k « devient grand » on a environ une chance sur deux de tirer une boule n°1 et une chance sur 4 de tirer une boule n°2 ou n°3.
Ces probabilités sont proches des proportions de boules n°1, n°2 et n°3 : respectivement $\dfrac{5}{9}$, $\dfrac{2}{9}$ et $\dfrac{2}{9}$, mais ces proportions sont nuancées par le fait que le tirage s'effectue plus souvent dans l'urne 1 (la boule n°1 sort plus souvent) où les 3 numéros sont équiprobables .