Corrigé *Total sur 62 points*

Exercice 1 - quelques systèmes pour s'échauffer *5 points*

1. Résoudre les systèmes

a. Résoudre le système (S_1) : $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & - & y & + & 2z & = & -1 \\ 4x & + & y & + & 3z & = & 1 \end{array}\right.$ *1,75 points*

On utilise la méthode du pivot de Gauss avec les « inconnues invisibles » :

$$(S_1) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow L_2 \\ \\ \\ \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -5 & 4 \\ 0 & 5 & -5 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1 \end{array}$$

$$(S_1) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -5 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow -\frac{1}{5}L_3 \\ L_3 \leftrightarrow L_2 \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2 \end{array}$$

Comme nous sommes arrivés au stade d'un système échelonné, nous finissons la résolution avec les inconnues « visibles » et par substitution (on peut aussi préciser à ce stade que le système est de Cramer, i.e. il n'admet qu'une unique solution, car il est triangulaire et tous ses pivots sont non nuls) :

$$(S_1) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x - y + 2z & = & -1 \\ y - z & = & 1 \\ -z & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -1 + y - 2z \\ y & = & 1 + z \\ z & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & 1 \\ z & = & 0 \end{array}\right.$$

donc le système admet $(0, 1, 0)$ comme unique solution (il est facile de vérifier que c'est bien une solution).

b. Résoudre le système (S_2) : $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -2x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & - & 2y & + & z & = & 2 \\ x & + & y & - & 2z & = & 0 \end{array}\right.$ *1,25 points*

On utilise la méthode des « inconnues invisibles » :

$$(S_2) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow L_2 \\ \\ \\ \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -3 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

donc en repassant à l'écriture avec les inconnues visibles, on voit clairement que le système est incompatible car les lignes 2 et 3 se contredisent ($L_2 + L_3$ entraine $4 = -2$) :

$$(S_2) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & z & = & 2 \\ & & -3y & + & 3z & = & 4 \\ & & 3y & - & 3z & = & -2 \end{array}\right.$$

Nota bene : en faisant dès le début la somme des trois lignes, on tombe d'emblée sur $0 = 2$ (qui donne la contradiction).

2. La matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ? Si oui, déterminer sa matrice inverse. *2 points*

On utilise la méthode des « inconnues invisibles » :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \leftarrow L_2 - L_1 \\ \\ \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow L_3 - L_2 \end{array}$$

A ce stade, on peut déjà dire que M est inversible car elle a été réduite en une matrice triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux sont non nuls.

enfin $\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow L_1 - L_3 \\ \\ \\ \end{array}$ dont on déduit que $M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 2 - partie de pêche *5 points*

Sur un grand lac, le concours récompense les pêcheurs ayant attrapé le plus de poissons en trois heures. Le lac étant tellement grand qu'on suppose que les chances d'attraper un poisson quel qu'il soit sont identiques et sont indépendantes du nombre de poissons déjà pêchés par les concurrents. Notre pêcheur est sur le lac et se concentre pour faire le plus de prises.

1. Dans cette question, on découpe les trois heures en périodes de 20 minutes. Pendant chaque période qu'on supposera indépendante, le pêcheur attrape au plus un poisson et la probabilité d'attraper un poisson est de $\dfrac{1}{4}$

a. Reconnaître la loi de la variable aléatoire U donnant le nombre de poissons attrapés par le pêcheur pendant une période. *0,5 point*

U suit une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{4}$ car $U(\Omega) = \{0; 1\}$ et $P(U = 1) = \dfrac{1}{4}$

b. Reconnaître la loi de la variable aléatoire V donnant le nombre de poissons attrapés par le pêcheur pendant le concours. *1 point*

$V \hookrightarrow \mathscr{B}\left(9, \dfrac{1}{4}\right)$ car V dénombre le nombre de succès « obtenir un poisson », de probabilité $p = \dfrac{1}{4}$, dans la répétition de 9 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

c. Quelle est la probabilité que le pêcheur termine le concours bredouille, c'est-à-dire qu'il n'ait attrapé aucun poisson ? *1 point*

$P(V = 0) = \dbinom{9}{0}\left(\dfrac{1}{4}\right)^0\left(\dfrac{3}{4}\right)^{9-0} = \left(\dfrac{3}{4}\right)^9$ donc la probabilité que le pêcheur termine le concours bredouille, est de $\left(\dfrac{3}{4}\right)^9$

2. Dans cette question, on suppose à présent que le nombre de poissons attrapés par le pêcheur sur toute la durée de l'épreuve est une variable aléatoire X suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$

a. Rappeler $X(\Omega), P([X = k])$ pour tout $k \in X(\Omega)$, ainsi que l'espérance et la variance de X en fonction de λ*1 point*

$X(\Omega) = \mathbb{N}$, et $\forall k \in \mathbb{N}, P([X = k]) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$ et $E(X) = \lambda = V(X)$

b. Quelle valeur faut-il donner à λ pour que le nombre moyen de poissons attrapés par le pêcheur sur les trois heures soit identiques dans les questions **1.** et **2.** ? *1 point*

$E(X) = E(V) \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{9}{4}$

c. Avec la valeur de λ trouvée précédemment, quelle est la probabilité que le pêcheur termine le concours bredouille ? *0,5 point*

La probabilité que le pêcheur termine le concours bredouille est de $P([X = 0]) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^0}{0!} = e^{-\frac{9}{4}}$

Problème 1

29 points

Partie I

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$ et on note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Déterminer le domaine de définition de f que l'on notera $\mathscr{D}_f$ ainsi que son domaine de dérivabilité. *1 point*

f est définie dès lors que $x^2 + x + 1 > 0$, or ce trinôme n'a pas de racine car $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3$ donc il est du signe de a qui vaut 1 ici, donc $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 > 0$ et de fait $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$
f est également dérivable sur $\mathscr{D}_f$ en tant que composée de fonctions dérivables sur cet intervalle.

2. Calculer $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x)$ *2 points*

$f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \ln\left(\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{2} + 1\right) = \ln\left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2}\right) = \ln\left(\dfrac{3}{4}\right) = \ln(3) - \ln(4) = \ln(3) - \ln(2^2) = \ln(3) - 2\ln(2)$
par addition de limite $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x^2 + x + 1 = +\infty$
et de même par produit de limites $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} x^2 + x + 1 = +\infty$ car $x^2 + x + 1 = x(x+1) + 1$
or $\displaystyle\lim_{X \to +\infty} \ln(X) = +\infty$ d'où par composition $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

3. Dresser le tableau de variations complet de f *1,5 points*

Comme f s'écrit $f(x) = \ln(u(x))$ alors $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = x^2 + x + 1$ et donc $u'(x) = 2x + 1$
donc $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \dfrac{2x+1}{x^2 + x + 1}$ et comme le dénominateur est toujours strictement positif, $f'(x)$ est du signe de $2x + 1$
or $2x + 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow 2x \geqslant 1 \Leftrightarrow x \geqslant -\dfrac{1}{2}$, d'où, avec les éléments du **2.**, le tableau de variations

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{2}$		$+\infty$
$2x+1$		-	0	+	
$f'(x)$		-	0	+	
f	$+\infty$	$\searrow$	$\ln(3) - 2\ln(2)$	$\nearrow$	$+\infty$

4. Montrer, en la résolvant, que l'équation $f(x) = 0$ d'inconnue x admet exactement deux solutions. *1 point*

Soit $x \in \mathbb{R}$, alors $f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x^2 + x + 1) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 1$ (par propriété de la fonction ln)
donc $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -1$

5. Déterminer une équation de chacune tangentes à $\mathscr{C}_f$ aux points d'abscisses 0 et -1 *1 point*

Par définition, la tangente au point d'abscisse 0 a pour équation $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$ i.e. $y = x$
car $f'(0) = \dfrac{2 \times 0 + 1}{0^2 + 0 + 1} = 1$ et $f(0) = 0$ d'après **4.** (ou $f(0) = \ln(0^2 + 0 + 1) = \ln(1) = 0$)
et la tangente au point d'abscisse 1 a pour équation $y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$ i.e. $y = -x - 1$
car $f'(-1) = \dfrac{2 \times (-1) + 1}{1^2 - 1 + 1} = -$ et $f(-1) = 0$ d'après **4.** (ou $f(-1) = \ln((-1)^2 - 1 + 1) = \ln(1) = 0$)

6. **a.** Calculer f'', la dérivée seconde de f et vérifier que pour tout $x \in \mathscr{D}_f$ on a : $f''(x) = \dfrac{-2x^2 - 2x + 1}{(x^2 + x + 1)^2}$ *1 point*

En notant $f' = \dfrac{v}{w}$ alors $f'' = \dfrac{v'w - vw'}{w^2}$
or $v(x) = 2x + 1 \Rightarrow v'(x) = 2$ et $w(x) = u(x) = x^2 + x + 1$ donc $w'(x) = u'(x) = 2x + 1$
donc $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = \dfrac{2(x^2 + x + 1) - (2x+1)(2x+1)}{(x^2 + x + 1)^2} = \dfrac{2x^2 + 2x + 2 - (4x^2 + 4x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2} = \dfrac{-2x^2 - 2x + 1}{(x^2 + x + 1)^2}$

b. Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$ et vérifier que $\mathscr{C}_f$ admet exactement deux points d'inflexions. *2 points*

Pour étudier la convexité de f, il faut déterminer le signe de f'', or d'après la question précédente, $f''(x)$ est du signe de $-2x^2 - 2x + 1$
or le discriminant de ce trinôme vaut $\Delta = (-2)^2 - 4 \times (-2) \times 1 = 4 + 8 = 12$ donc $-2x^2 - 2x + 1$ admet deux racines : $x_1 = \dfrac{2 - \sqrt{12}}{2 \times (2)} = \dfrac{-2 + 2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{-1 + \sqrt{3}}{2}$ car $\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{4}\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ et de même $x_2 = \dfrac{-1 - \sqrt{3}}{2}$
comme $a < 0$, $-2x^2 - 2x + 1$ est négatif à l'extérieur des racines et on peut donc établir le tableau de signes de f''

x	$-\infty$		x_2		x_1		$+\infty$
$-2x^2-2x+1$		-	0	+	0	-	
$f''(x)$		-	0	+	0	-	

donc par propriété f est concave sur $\left]-\infty, \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}\right]$ et sur $\left[\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}, +\infty\right[$, et convexe sur $\left[\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}, \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}\right]$

de plus f admet deux points d'inflexion, aux abscisses $\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$ et $\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$ car f'' s'annule en changeant de signe en ces points.

7. **a.** Justifier, sans la résoudre, que l'équation $f(x) = 1$ admet exactement une solution α dans $[0, +\infty[$ *1 point*

D'après la question **3.** f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, de plus f est continue (car dérivable) donc, d'après le théorème de la bijection f réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[f(0), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[= [0, +\infty[$

or $1 \in [0, +\infty[$ donc 1 admet un unique antécédent par f, i.e. l'équation $f(x) = 1$ admet exactement une solution sur $[0, +\infty[$

b. On donne $\ln(3) \simeq 1,1$. Vérifier que $\alpha \in [0, 1]$ *1 point*

Comme vu plus haut, $f(0) = 0$ et $f(1) = \ln(3)$ donc $f(0) < 1$ et d'après l'énoncé $f(1) > 1$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires (f étant toujours continue), l'équation $f(x) = 1$ admet une solution sur $[0, 1]$ or α est l'unique solution de cette équation sur $\mathbb{R}_+$ donc $\alpha \in [0, 1]$

c. Vérifier que $f(-1-\alpha) = 1$ *1 point*

Par définition de f, $f(-1-\alpha) = \ln((-\alpha-1)^2 - \alpha - 1 + 1) = \ln(\alpha^2 + 2\alpha + 1 - \alpha) = \ln(\alpha^2 + \alpha + 1) = f(\alpha)$ or $f(\alpha) = 1$ par définition de α donc $f(-1-\alpha) = 1$

d. Avec Python, définir la fonction f, puis recopier et compléter l'algorithme suivant afin qu'il permette de calculer une valeur approchée de α à 10^{-3} près par dichotomie. *1,5 points*

algorithme habituel, dans le cas d'une fonction croissante ici.

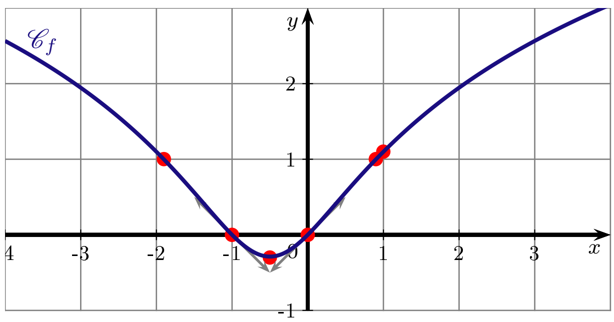
```
import numpy as np
def f(x):
  return np.log(x**2+x+1)
```

```
a=0
b=1
while b-a>10**(-3):
  c=(a+b)/2
  if f(c)>1:
    b=c
  else :
    a=c
print(c)
```

8. On donne les valeurs suivantes : $\alpha \simeq 0,9$; $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) \simeq -0,3$ et $\sqrt{3} \simeq 1,7$

A l'aide des éléments obtenus précédemment, représenter graphiquement la courbe $\mathscr{C}_f$ *2 points*

On utilise les points : $f(-1-\alpha) = 1$; $f(-1) = 0$; $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) \simeq -0,3$; $f(0) = 0$; $f(\alpha) = 1$ et $f(1) = \ln(3)$ ainsi que les tangentes, les variations et les deux points d'inflexion dont on connait les abscisses (environ $-1,35$ et $0,35$) mais pas les ordonnées.
de plus quand $x \to \infty$ ($+$ ou $-$), c'est le terme x^2 qui va prédominer dans le logarithme et donc $f(x)$ sera proche de $\ln(x^2) = 2\ln(x)$, la courbe aura donc l'allure d'un logarithme (le double environ) aux extrémités.



Partie II

Dans la suite de l'exercice, on étudie la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$

1. Etudier les variations de g sur $[1, +\infty[$ où g est la fonction définie par $g(x) = f(x) - x$ *1 point*

Soit $x \in [1, +\infty[$ alors $g'(x) = f'(x) - 1 = \dfrac{2x+1-(x^2+x+1)}{x^2+x+1} = \dfrac{x-x^2}{x^2+x+1} = \dfrac{x(1-x)}{x^2+x+1}$
or $x \geqslant 1$ donc $1 - x \leqslant 0$ (et même < 0 si $x > 1$) et $x \leqslant 0$ enfin $x^2 + x + 1$ (cf. plus haut) donc $g'(x) \leqslant 0$ (et même < 0 si $x > 1$) donc g est strictement décroissante sur $[1, +\infty[$

2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $[1, +\infty[$ que l'on notera β *2 points*

Nous allons utiliser le théorème de la bijection mais au préalable, nous calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

$g(x) = f(x) - x = \ln(x^2+x+1) - x = \ln(x^2+x+1) - \ln(e^x) = \ln\left(\dfrac{x^2+x+1}{e^x}\right) = \ln\left(\dfrac{x^2}{e^x} + \dfrac{x}{e^x} + \dfrac{1}{e^x}\right)$

et par croissances comparées $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{e^x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$ et d'après les limites usuelles $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{e^x} + \dfrac{x}{e^x} + \dfrac{1}{e^x} = 0$ or $\lim\limits_{X\to 0} \ln(X) = -\infty$ donc par composition $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{x^2}{e^x} + \dfrac{x}{e^x} + \dfrac{1}{e^x}\right) = -\infty$

puis, g est strictement décroissante sur $[1, +\infty[$ et continue (car f l'est et $g(x) = f(x) - x$) donc, d'après le théorème de la bijection, g réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $]\lim\limits_{x\to+\infty} g(x), g(1)] =]-\infty, \ln(3) - 1]$

or $\ln(3) - 1 > 0$ d'après l'énoncé, donc $0 \in]-\infty, \ln(3)-1]$ et de fait 0 admet un unique antécédent par g i.e. l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $[1, +\infty[$

3. En déduire le signe de g sur $[1, +\infty[$ *0,5 point*

g est strictement décroissante sur $[1, +\infty[$ et $g(\beta) = 0$ donc $g(x)$ est positif sur $[1, \beta]$ et négatif sur $[\beta, +\infty[$

4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [\beta, +\infty[$ *2 points*

Par récurrence évidemment, pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $P(n) : u_n \geqslant \beta$ »

Nota bene : ici l'initialisation demande du travail car β n'a pas été localisé précisément et donc on ne peut le situer a priori par rapport à 5

Initialisation : $u_0 = 5$ et $f(5) = \ln(5^2 + 5 + 1) = \ln(31)$ or la fonction ln est croissante
donc $f(5) \leqslant \ln(32)$ et $\ln(32) = \ln(2^5) \leqslant \ln(e^5) = 5\ln(e) = 5$ car $2 < e$ et à nouveau par croissance de ln
donc $f(5) \leqslant 5$ i.e. $f(5) - 5 \leqslant 0$ et donc, comme $5 \in [1, +\infty[$, d'après la question **9.a)**, $5 \geqslant \beta$, sinon on aurait $f(5) - 5 \geqslant 0$ (ce qui faux), d'où finalement $P(0)$ est vraie

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $P(n)$ est vraie
alors par hypothèse $u_n \geqslant \beta$ et donc $f(u_n) \geqslant f(\beta)$ car f est croissante sur $\left[-\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$
or $f(\beta) = \beta$ par définition de β ($g(\beta) = f(\beta) - \beta = 0$) et $f(u_n) = u_{n+1}$ donc $u_{n+1} \geqslant \beta$
i.e. $P(n+1)$ est vraie, d'où l'hérédité
donc par théorème de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ est vraie, i.e. $u_n \geqslant \beta$

5. Déterminer les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *1 point*

D'après **9.c.** $\forall x \geqslant \beta, g(x) \leqslant 0$ et d'après **9.d.** $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant \beta$
donc $\forall n \in \mathbb{N}, g(u_n) \leqslant 0$ i.e. $f(u_n) - u_n \leqslant 0$ et donc $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ car $u_{n+1} = f(u_n)$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

6. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite. *1,5 points*

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée (par β par exemple), donc d'après le théorème de la limite monotone, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ de plus par propriété $u_{n+1} \to \ell$ et $f(u_n) \to f(\ell)$ car f est continue sur I
or $f(u_n) = u_{n+1}$ donc par unicité de la limite $f(\ell) = \ell \Leftrightarrow f(\ell) - \ell = 0 \Leftrightarrow g(\ell) = 0 \Leftrightarrow \ell = \beta$ d'après **2.** (car $\ell \geqslant 1$ par passage à la limite dans l'inégalité puisque $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant \beta \geqslant 1$)

7. Montrer que $\dfrac{3}{2} \leqslant \beta$ (on donne $2e \leqslant 5,5$) *1,5 points*

$f\left(\dfrac{3}{2}\right) = \ln\left(\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{2} + 1\right) = \ln\left(\dfrac{19}{4}\right)$ donc $f\left(\dfrac{3}{2}\right) \geqslant \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \dfrac{19}{4} \geqslant e^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow \left(\dfrac{19}{4}\right)^2 \geqslant e^3$

ce qui est vrai car $2e \leqslant 5,5 \Rightarrow e^3 \leqslant \left(\dfrac{11}{4}\right)^3 = \dfrac{1331}{64}$ et $\left(\dfrac{19}{4}\right)^2 = \dfrac{361}{16} = \dfrac{1444}{64}$

finalement $f\left(\dfrac{3}{2}\right) \geqslant \dfrac{3}{2}$ et donc $\dfrac{3}{2} \leqslant \beta$ sinon d'après la question **9.c.** on aurait $f\left(\dfrac{3}{2}\right) < \dfrac{3}{2}$

8. On pose $I = \left[\frac{3}{2}, +\infty\right[$, montrer qu'il existe $k \in]0,1[$ tel que $\forall x \in I, |f'(x)| \leqslant k$ *1,5 points*

D'après **6.b.**, $\forall x \geqslant \frac{-1+\sqrt{3}}{2}, f''(x) \leqslant 0$ donc (comme $\frac{3}{2} \geqslant \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$)$\forall x \geqslant \frac{3}{2}, f''(x) \leqslant 0$
donc f' est décroissante sur I, de plus $f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$ donc $f'(x) > 0$ sur I et de fait $|f'(x)| = f'(x)$
donc $\forall \in I, |f'(x)| \leqslant f'\left(\frac{3}{2}\right)$ i.e. $|f'(x)| \leqslant \frac{16}{19}$ d'où le résultat avec $k = \frac{16}{19}$ car $f'\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{2\times\frac{3}{2}+1}{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{2}+1} = \frac{4}{\frac{19}{4}} = \frac{16}{19}$

9. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \beta| \leqslant k|u_n - \beta|$ *1 point*

Etant donné que $|f'|$ est majorée sur I d'après la question précédente, on peut appliquer l'inégalité des accroissements finis. Pour $n \in \mathbb{N}$, on le fait avec $a = \beta$ et $b = u_n$, qui sont bien des éléments de l'intervalle I d'après **7.** et **4.** respectivement, et on en déduit que :
$|f(u_n) - f(\beta)| \leqslant k|u_n - \beta|$ i.e. $|u_{n+1} - \beta| \leqslant k|u_n - \beta|$ car $u_{n+1} = f(u_n)$ et $f(\beta) = \beta$ par définitions des deux.

10. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \beta| \leqslant k^n|u_0 - \beta|$ *1,5 points*

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $P(n)$: $|u_n - \beta| \leqslant k^n|u_0 - \beta|$ »
<u>Initialisation</u> : $P(0)$ est vraie $\Leftrightarrow |u_0 - \beta| \leqslant k^0|u_0 - \beta| \Leftrightarrow |u_0 - \beta| \leqslant |u_0 - \beta|$
ce qui est vrai donc $P(0)$ est vraie

<u>Hérédité</u> : soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $P(n)$ est vraie
d'après **5.**, $|u_{n+1} - \beta| \leqslant k|u_n - \beta|$ et par hypothèse $|u_n - \beta| \leqslant k^n|u_0 - \beta|$
donc $k|u_n - \beta| \leqslant k^{n+1}|u_0 - \beta|$ et donc $|u_{n+1} - \beta| \leqslant k^{n+1}|u_0 - \beta|$ i.e. $P(n+1)$ est vraie, d'où l'hérédité
donc par théorème de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ est vraie.

11. Retrouver la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *1 point*

On peut alors conclure sur la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, car $k^n \to 0$ (suite géométrique de raison $k < 1$ par définition de k) donc par produit $k^n|u_0 - \beta| \to 0$ et par théorème des gendarmes, $|u_n - \beta| \to 0$ ce qui équivaut à $u_n \to \beta$

12. Ecrire un programme `Python` qui permette d'obtenir une valeur approchée de β à 10^{-5} près. *2 points*

On sait que $|u_0 - \beta| = u_0 - \beta$ d'après **4.** et donc $|u_0 - \beta| \leqslant 4$ car $\beta \geqslant \frac{3}{2}$ d'après **7.**

On va calculer de manière itérative les puissances de $k = \frac{16}{19}$ multipliées par 4, en calculant au passage les valeurs de u_n, tant que le seuil de 10^{-5} n'est pas atteint.

```
import numpy as np
u=5
n=0
k=16/19
while 4*k**n>10**(-5) :
  n=n+1
  u=f(u)
print(u,'est une valeur approchee de beta a 0,00001 près')
```

Problème 2

23 points

Partie 1 : puissances d'une matrice

1. On pose $P = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, $M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a. Calculer PQ puis en déduire P^{-1} *1 point*

$$PQ = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2 & 2-2 & 2-2 \\ 1-1 & 1+1+2 & 1+1-2 \\ 1-1 & 1+1-2 & 1+1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4I$$

donc $P\frac{1}{4}Q = I$ donc P est inversible et $P^{-1} = \frac{1}{4}Q$

b. Déterminer la matrice D où $D = P^{-1}MP$ *1,5 points*

D'après la question précédente :

$$P^{-1}M = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 1+1 & 2 & 2 \\ 1+1 & -2 & -2 \\ 2-2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc par définition :

$$D = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2+1+1 & -2+1+1 & 1-1 \\ 2-1-1 & -2-1-1 & -1+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c. Montrer que $M = PDP^{-1}$ *1 point*

On déduit de la question précédente que $PD = PP^{-1}MP = IMP = MP$
et donc $PDP^{-1} = MPP^{-1} = MI = M$

d. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel j, on a $M^j = PD^jP^{-1}$ *1,5 points*

Pour $j \in \mathbb{N}$, on définit l'assertion $P(j)$: $M^j = PD^jP^{-1}$

<u>Initialisation</u> : $P(0)$ est vraie $\Leftrightarrow M^0 = PD^0P^{-1} \Leftrightarrow I = PIP^{-1} = PP^{-1} = I$
donc $P(0)$ est vraie

<u>Hérédité</u> : soit $j \in \mathbb{N}$, supposons $P(j)$ vraie
donc par hypothèse $M^j = PD^jP^{-1}$
donc $M^{j+1} = M^j \times M = PD^jP^{-1}PDP^{-1} = PD^jIDP^{-1} = PD^jDP^{-1} = PD^{j+1}P^{-1}$ donc $P(j+1)$ est vraie
donc par théorème de récurrence, $\forall j \in \mathbb{N}, P(j)$ est vraie, i.e. $M^j = PD^jP^{-1}$

e. Écrire, pour tout entier naturel j non nul, la première colonne de la matrice M^j. Vérifier que ce résultat reste valable si $j = 0$ *2 points*

On aura la première colonne de M^j en faisant le produit par la droite par les premières colonnes :
tout d'abord par propriété sur les puissances diagonales,

$$D^j = \begin{pmatrix} \left(\frac{2}{3}\right)^j & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{2}{3}\right)^j & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ donc } M^j = PD^jP^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \left(\frac{2}{3}\right)^j & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{2}{3}\right)^j & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots \\ -1 & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } M^j = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \left(\frac{2}{3}\right)^j & \cdots & \cdots \\ -\left(-\frac{2}{3}\right)^j & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2\left(\frac{2}{3}\right)^j + 2\left(\frac{-2}{3}\right)^j & \cdots & \cdots \\ \left(\frac{2}{3}\right)^j - \left(\frac{-2}{3}\right)^j & \cdots & \cdots \\ \left(\frac{2}{3}\right)^j - \left(\frac{-2}{3}\right)^j & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

et pour $j = 0$ la première colonne est $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$ ce qui est bien celle de $M^0 = I$

Partie 2 : étude d'une suite de variables aléatoires

Une urne contient trois boules numérotées de 1 à 3. Un tirage consiste à extraire au hasard une boule de l'urne puis à la remettre dans l'urne pour le tirage suivant.
On définit une suite de variables aléatoires $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de la manière suivante :

- Pour tout entier naturel k non nul, X_k est définie *après* le $k^{\text{ème}}$ tirage.
- On procède au 1^{er} tirage et X_1 prend la valeur du numéro de la boule obtenue à ce tirage.
- Après le $k^{\text{ème}}$ tirage ($k \in \mathbb{N}^*$) :
  Soit X_k a pris la valeur 1, dans ce cas on procède au $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage et X_{k+1} prend la valeur du numéro obtenu à ce $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage.
  Soit X_k a pris la valeur j, différente de 1, dans ce cas on procède également au $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage et X_{k+1} prend la valeur j si la boule tirée porte le numéro j et la valeur 1 sinon.

1. Reconnaître la loi de X_1 *0,5 point*

X_1 prend la valeur du numéro de la boule obtenue lors du premier tirage, i.e. $1, 2$ ou 3
Les numéros sont équiprobables donc $X_1 \hookrightarrow \mathscr{U}(\{1,2,3\})$ (loi uniforme sur $[\![1,3]\!]$)

2. Simulation informatique de l'expérience aléatoire décrite dans cette partie.
Compléter le programme suivant pour qu'il simule l'expérience aléatoire décrite dans cette partie, en créant une fonction qui prend en entrée un entier k et qui renvoie la valeur de la variable X_k *1,5 points*

```
import numpy.random as rd
def SimulX(k):
  X=rd.randint(1,4)
  for i in range(2,k+1):
    tirage=rd.randint(1,4)
    if X==1 :
      X=tirage
    else :
      if tirage != X :
        X=1
  return X
```

`rd.randint(1,4)` simule le tirage d'une boule parmi les 3 (le 4 est exclu)
`X` contient les valeurs successives des variables $X_1, X_2 \cdots X_k$
Si $X_k = 1$ alors X_{k+1} vaut le résultat du tirage, ce qui est traduit par `X=tirage`
Si $X_k = j$ et que le numéro tiré est autre que j alors $X_{k+1} = 1$ alors que X_k reste inchangé sinon (donc on ne change pas `X`)

3. On note U_k la matrice à 3 lignes et une colonne dont l'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne est $P(X_k = i)$

a. Déterminer les probabilités $P_{(X_k=j)}(X_{k+1} = i)$, pour tout couple (i,j) de $\{1,2,3\} \times \{1,2,3\}$ *1,5 points*

Si $X_k = 1$ alors $X_{k+1} \hookrightarrow \mathscr{U}(\{1,2,3\})$ donc $P_{(X_k=1)}(X_{k+1} = 1) = P_{(X_k=1)}(X_{k+1} = 3) = P_{(X_k=1)}(X_{k+1} = 3) = \dfrac{1}{3}$

si $X_k = 2$ alors $P_{(X_k=2)}(X_{k+1} = 2) = \dfrac{1}{3}$ (c'est la probabilité de tirer 2)

et $P_{(X_k=2)}(X_{k+1} = 1) = \dfrac{2}{3}$ (car dans les deux autres cas, i.e. « tirer 1 ou 3 » alors X_{k+1} vaut 1) et enfin $P_{(X_k=2)}(X_{k+1} = 3) = 0$

de manière analogue, si $X_k = 3$ alors $P_{(X_k=3)}(X_{k+1} = 3) = \dfrac{1}{3}$ (c'est la probabilité de tirer 3)

et $P_{(X_k=3)}(X_{k+1} = 1) = \dfrac{2}{3}$ et $P_{(X_k=3)}(X_{k+1} = 2) = 0$

b. On admet que $\{(X_k = 1), (X_k = 2), (X_k = 3)\}$ est un système complet d'événements.
Montrer, grâce à la formule des probabilités totales, que

$$P(X_{k+1} = 1) = \frac{1}{3}P(X_k = 1) + \frac{2}{3}P(X_k = 2) + \frac{2}{3}P(X_k = 3)$$

Trouver des relations analogues pour $P(X_{k+1} = 2)$ et $P(X_{k+1} = 3)$ *2 points*

Comme $\{(X_k = 1), (X_k = 2), (X_k = 3)\}$ est un système complet d'événements, d'après la formule des probabilités totales :
$P(X_{k+1} = 1) = P_{(X_k=1)}(X_{k+1} = 1)P(X_k = 1) + P_{(X_k=2)}(X_{k+1} = 1)P(X_k = 2) + P_{(X_k=3)}(X_{k+1} = 1)P(X_k = 3) = \dfrac{1}{3}P(X_k = 1) + \dfrac{2}{3}P(X_k = 2) + \dfrac{2}{3}P(X_k = 3)$

car d'après la question précédente, $P_{(X_k=1)}(X_{k+1} = 1) = \dfrac{1}{3}$ et $P_{(X_k=2)}(X_{k+1} = 1) = P_{(X_k=3)}(X_{k+1} = 1) = \dfrac{2}{3}$

de manière analogue on trouve
$P(X_{k+1} = 2) = P_{(X_k=1)}(X_{k+1} = 2)P(X_k = 1) + P_{(X_k=2)}(X_{k+1} = 2)P(X_k = 2) + P_{(X_k=3)}(X_{k+1} = 2)P(X_k = 3) = \dfrac{1}{3}P(X_k = 1) + \dfrac{1}{3}P(X_k = 2) + 0$ et
$P(X_{k+1} = 3) = P_{(X_k=1)}(X_{k+1} = 3)P(X_k = 1) + P_{(X_k=2)}(X_{k+1} = 3)P(X_k = 2) + P_{(X_k=3)}(X_{k+1} = 3)P(X_k = 3) = \dfrac{1}{3}P(X_k = 1) + 0 + \dfrac{1}{3}P(X_k = 3)$

c. Déterminer la matrice A de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, telle que, pour tout entier naturel k non nul, on a $U_{k+1} = AU_k$ *1 point*

En posant $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ alors $AU_k = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{P}(X_k = 1) \\ \mathrm{P}(X_k = 2) \\ \mathrm{P}(X_k = 3) \end{pmatrix}$

donc $AU_k = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\mathrm{P}(X_k = 1) + \frac{2}{3}\mathrm{P}(X_k = 2) + \frac{2}{3}\mathrm{P}(X_k = 3) \\ \frac{1}{3}\mathrm{P}(X_k = 1) + \frac{1}{3}\mathrm{P}(X_k = 2) + 0\mathrm{P}(X_k = 3) \\ \frac{1}{3}\mathrm{P}(X_k = 1) + 0\mathrm{P}(X_k = 2) + \frac{1}{3}\mathrm{P}(X_k = 3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{P}(X_{k+1} = 1) \\ \mathrm{P}(X_{k+1} = 2) \\ \mathrm{P}(X_{k+1} = 3) \end{pmatrix}$

d'après la question précédente. On a donc montré $AU_k = U_{k+1}$

d. Montrer qu'en posant $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, alors, pour tout k de $\mathbb{N}$, on a : $U_k = A^k U_0$ *1,5 points*

Par récurrence, évidemment ! Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit l'assertion $Q(k) : U_k = A^k U_0$

<u>Initiation</u> : $Q(0)$ est vraie $\Leftrightarrow U_0 = A^0 U_0 \Leftrightarrow U_0 = IU_0 \Leftrightarrow U_0 = U_0$
ce qui est vrai, donc $Q(0)$ est vraie

<u>Hérédité</u> : soit $k \in \mathbb{N}$, supposons que $Q(k)$ est vraie

<u>1^{er} cas</u> : si $k = 0$ on ne peut alors pas utiliser la question précédente (qui n'est pas valable pour $k = 0$) mais il suffit de montrer que $U_1 = AU_0$, or $U_1 = \begin{pmatrix} P(X_1 = 1) \\ P(X_1 = 2) \\ P(X_1 = 3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ d'après **1.** et $AU_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

donc $U_1 = AU_0$ d'où l'hérédité dans ce cas.

<u>$2^{\text{ème}}$ cas</u> : si $k = 1$
d'après la question précédente (valable pour $k \in \mathbb{N}^*$) $U_{k+1} = AU_k$ et par hypothèse de récurrence, $U_k = A^k U_0$
donc $U_{k+1} = AA^k U_0 = A^{k+1} U_0$ c'est-à-dire que $Q(k+1)$ est vraie, d'où l'hérédité dans ce cas (plus général)
donc par théorème de récurrence, $\forall k \in \mathbb{N}, Q(k)$ est vraie, i.e. $U_k = A^k U_0$

4. **a.** Vérifier que $A = M + \frac{1}{3}I$, puis établir que, pour tout k de $\mathbb{N}$, on a : $A^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} M^j$ *3 points*

Par définition $M + \frac{1}{3}I = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = A$

la deuxième partie de la question correspond à une formule du binôme de Newton pour les matrices, comme nous ne la connaissons pas, il faut la démontrer (difficile), ce que nous faisons par récurrence.

Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit l'assertion $R(k) : A^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} M^j$

<u>Initiation</u> : $R(0)$ est vraie $\Leftrightarrow A^0 = \sum_{j=0}^{0} \binom{0}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{0-j} M^j \Leftrightarrow I = \binom{0}{0} \left(\frac{1}{3}\right)^0 M^0 \Leftrightarrow I = I$
ce qui est vrai, donc $R(0)$ est vraie

<u>Hérédité</u> : soit $k \in \mathbb{N}$, supposons que $R(k)$ est vraie

alors par hypothèse de récurrence, $A^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} M^j$ or $A^{k+1} = A^k A$ et $A = M + \frac{1}{3}I$

donc $A^{k+1} = \left(\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} M^j\right)\left(M + \frac{1}{3}I\right) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} M^j M + \frac{1}{3}\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} M^j I$

$$= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} M^{j+1} + \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1-j} M^{j}$$

or $\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} M^{j+1} = \sum_{i=1}^{k+1} \binom{k}{i-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-(i-1)} M^{i} = \sum_{i=1}^{k+1} \binom{k}{i-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1-i} M^{i}$

par changement d'indice $i = j+1 \Leftrightarrow j = i-1$ ($j = 0 \Rightarrow i = 1$ et $j = k \Rightarrow i = k+1$)

on va ensuite enlever un terme à chaque somme pour garder une gamme d'indice identique (de 1 à k)

donc $A^{k+1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{k} M + \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k}{i-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1-i} M^{i} + \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1-j} M^{j}$

$$= \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1-i} M^{i} + \binom{k}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1-(k+1)} M^{k+1} + \binom{k}{0} \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1-0} M^{0} + \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1-j} M^{j}$$

$$= \binom{k}{0} \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1-0} M^{0} + \sum_{j=1}^{k} \left[\binom{k}{j-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1-j} M^{j} + \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1-j} M^{j}\right] + \binom{k}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1-(k+1)} M^{k+1}$$

$$= \binom{k+1}{0} \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1-0} M^{0} + \sum_{j=1}^{k} \left[\binom{k}{j-1} + \binom{k}{j}\right] \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1-j} M^{j} + \binom{k+1}{k+1} \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1-(k+1)} M^{k+1}$$

car $\binom{k}{k}\binom{k+1}{k+1} = 1 = \binom{k}{0} = \binom{k+1}{0}$

$$= \binom{k+1}{0} \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1-0} M^{0} + \sum_{j=1}^{k} \binom{k+1}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1-j} M^{j} + \binom{k+1}{k+1} \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1-(k+1)} M^{k+1}$$

car $\binom{k}{j-1} + \binom{k}{j} = \binom{k+1}{j}$ d'après la formule du triangle de Pascal

or on peut rajouter dans la somme $\binom{k+1}{0} \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1-0} M^{0}$ (terme d'indice $j = 0$) et $\binom{k+1}{k+1} \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1-(k+1)}$ (terme d'indice $j = k+1$), d'où finalement $A^{k+1} = \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1-j} M^{j}$ c'est-à-dire que $R(k+1)$ est vraie, d'où l'hérédité

donc par théorème de récurrence, $\forall k \in \mathbb{N}, R(k)$ est vraie.

b. En déduire les 3 éléments de la première colonne de la matrice A^k, puis vérifier que la loi de X_k est donnée par :
$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X_k = 1) = \frac{1}{2}\left(1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^{k}\right) \quad$ et $\quad P(X_k = 2) = P(X_k = 3) = \frac{1}{4}\left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{k}\right)$ *2,5 points*

On avait calculé la première colonne des M^j donc la première colonne de A^k est

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2\left(\frac{2}{3}\right)^{j} + 2\left(\frac{-2}{3}\right)^{j} & \cdots & \cdots \\ \left(\frac{2}{3}\right)^{j} - \left(\frac{-2}{3}\right)^{j} & \cdots & \cdots \\ \left(\frac{2}{3}\right)^{j} - \left(\frac{-2}{3}\right)^{j} & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

soit $\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} \left(\frac{2}{3}\right)^{j} + 2\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} \left(\frac{-2}{3}\right)^{j} & \cdots & \cdots \\ \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} \left(\frac{2}{3}\right)^{j} - \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} \left(\frac{-2}{3}\right)^{j} & \cdots & \cdots \\ \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} \left(\frac{2}{3}\right)^{j} - \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} \left(\frac{-2}{3}\right)^{j} & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$

or d'après la formule du binôme de Newton :

$\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} \left(\frac{2}{3}\right)^{j} = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right)^{k} = 1$ et $\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} \left(-\frac{2}{3}\right)^{j} = \left(-\frac{1}{3}\right)^{k}$

donc la première colonne de A^k est donc $\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 2+2\left(\dfrac{-1}{3}\right)^k \\ 1-\left(\dfrac{-1}{3}\right)^k \\ 1-\left(\dfrac{-1}{3}\right)^k \end{pmatrix}$

et, par définition de U_0, la colonne $U_k = A^k U_0$ est elle-même la première colonne de A^k donc on retrouve dans cette colonne les trois termes de la loi de X_k

soit $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\quad P(X_k = 1) = \dfrac{1}{2}\left(1+\left(-\dfrac{1}{3}\right)^k\right) \quad$ et $\quad P(X_k = 2) = P(X_k = 3) = \dfrac{1}{4}\left(1-\left(-\dfrac{1}{3}\right)^k\right)$

c. Déterminer les limites quand k tend vers $+\infty$ de $P(X_k = 1), P(X_k = 2), P(X_k = 3)$ et interpréter le résultat. *1,5 points*

Comme $\left|-\dfrac{1}{3}\right| < 1$ alors $\left(\dfrac{-1}{3}\right)^k \to 0$ (forme q^n avec $|q| < 1$) donc $P(X_k = 1) \to \dfrac{1}{2}$ et $P(X_k = 2) = P(X_k = 3) \to \dfrac{1}{4}$ donc au bout d'un grand nombre de tirage, la variable aléatoire se rapproche d'une variable aléatoire dont la probabilité d'obtenir 1 vaut $\dfrac{1}{2}$ et la probabilité d'obtenir 2 ou 3 vaut $\dfrac{1}{4}$

5. **a.** Calculer l'espérance $E(X_k)$ de X_k pour $k \in \mathbb{N}^*$ *1,5 points*

Les valeurs de X_k sont seulement $\{1, 2, 3\}$

donc $E\left(X_k\right) = 1 \times P\left(X_k = 1\right) + 2 \times P\left(X_k = 2\right) + 3 \times P\left(X_k = 3\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(1+\left(-\frac{1}{3}\right)^k\right) + (2+3) \times \frac{1}{4}\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)^k\right) = \frac{1}{2} + \frac{5}{4} + \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{4}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)^k = \frac{7}{4} - \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^k$$

b. Avec Python, écrire une fonction, notée `esp`, qui renvoie $E(X_k)$ à l'appel de `esp(k)` *1 point*

Il s'agit simplement d'utiliser le résultat de la question précédente et d'en faire une fonction avec Python.

```python
def esp(k):
  return 7/4-3/4*(-1/3)**k
```