Corrigé *total sur 9 points*

Exercice 1 *4 points*

1. Résoudre le système suivant : *1,5 points*

$$\begin{cases} 2x+3y+z=4 \\ -x+y+2z=3 \\ 7x+3y-5z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+y+2z=3 & L_1 \leftrightarrow L_2 \\ 2x+3y+z=4 & L_1 \leftrightarrow L_2 \\ 7x+3y-5z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+y+2z=3 \\ 5y+5z=10 & \leftarrow L_2+2L_1 \\ 10y+9z=23 & \leftarrow L_3+7L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x+y+2z=3 \\ y+z=2 & \leftarrow \frac{1}{5}L_2 \\ 10y+9z=23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+y+2z=3 \\ y+z=2 \\ -z=3 & \leftarrow L_3-10L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y+2z-3 \\ y=2-z=5 \\ z=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5-6-3=-4 \\ y=5 \\ z=-3 \end{cases}$$

Nota bene : on peut utiliser indifféremment la méthode des inconnues invisibles ici.

donc le système admet pour unique solution : $(-4,5,-3)$

2. Inverser la matrice $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *2,5 points*

On peut cette fois utiliser la méthode des « inconnues invisibles » :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \leftarrow L_2-L_1 \\ \leftarrow L_3-L_1 \end{array}$$

A ce stade, on peut déjà dire que P est inversible car elle a été réduite en une matrice triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux sont non nuls.

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow -\frac{1}{3}L_3 \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & -2 & 0 & -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow L_1-4L_3 \\ \leftarrow L_2+2L_3 \\ \\ \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \leftarrow -\frac{1}{2}L_2 \\ \\ \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow L_1-L_2 \\ \\ \\ \end{array}$$

on trouve donc $P^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ (ce que l'on peut vérifier en calculant PP^{-1})

Exercice 2 *5 points*

On effectue une succession de tirages avec remise d'une boule dans une urne. L'urne contient deux boules numérotées 1 et 2

Soit X_2 la variable aléatoire égale au numéro du tirage où pour la première fois, les deux boules ont été obtenues au moins une fois.

1. Déterminer la loi de X_2 *2 points*

   L'événement ne peut se réaliser au premier tirage mais pour n'importe quel tirage à partir du deuxième, donc $X_2(\Omega) = [\![2;+\infty[\![$

   de plus en notant pour $k \in \mathbb{N}^*$, A_k : « la boule 1 a été piochée au $k^{\text{ème}}$ tirage » et B_k : « la boule 2 a été piochée au $k^{\text{ème}}$ tirage »,

   alors pour $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2, [X = n] = \left(\left(\bigcap_{k=1}^{n-1} A_k\right) \cap B_n\right) \cup \left(\left(\bigcap_{k=1}^{n-1} B_k\right) \cap A_n\right)$

   il y a deux façons de réaliser l'événement $[X = n]$, soit de tirer la boule 1 au $n-1$ premiers tirages puis la boule 2 au $n^{\text{ème}}$, soit l'inverse.

   Comme les événements sont incompatibles $P(X = n) = P\left(\left(\bigcap_{k=1}^{n-1} A_k\right) \cap B_n\right) + P\left(\left(\bigcap_{k=1}^{n-1} B_k\right) \cap A_n\right)$

   donc par indépendance mutuelle des tirages, $P(X = n) = \left(\prod_{k=1}^{n-1} P(A_k)\right) P(B_n) + \left(\prod_{k=1}^{n-1} P(B_k)\right) P(A_n)$

   or $\forall k \in \mathbb{N}^*, P(A_k) = P(B_k) = \dfrac{1}{2}$

   donc $P(X = n) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} \times \dfrac{1}{2} + \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} \times \dfrac{1}{2} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n} + \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n} = 2 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

2. Montrer que X_2 admet une espérance et une variance et les déterminer. *3 points*

   Par définition, X_2 admet une espérance si la série $\sum_{n\geqslant 2} nP(X = n)$ converge (absolument)

   or pour $n \in \mathbb{N}, \sum_{k=2}^{n} kP(X = k) = \sum_{k=2}^{n} k\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} k\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-1} - 1$ (relation de Chasles)

   or $\sum_{k=1}^{n} k\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-1}$ est une somme partielle d'une série géométrique dérivée convergente car $\left|\dfrac{1}{2}\right| < 1$

   donc X_2 admet une espérance, de plus $\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-1} = \dfrac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = 4$

   donc $E(X_2) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-1} - 1 = 3$

   De même, par définition et propriété, X_2 admet une variance si la série $\sum_{n\geqslant 2} n^2 P(X = n)$ converge

   or pour $n \in \mathbb{N}, \sum_{k=2}^{n} k^2 P(X = k) = \sum_{k=2}^{n} k^2\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-1} = \sum_{k=2}^{n} [k(k-1)+k]\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-1}$

   $= \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-1} + \sum_{k=2}^{n} k\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-1} = \dfrac{1}{2}\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-2} + \sum_{k=2}^{n} k\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-1}$

   or la première somme est une somme partielle d'une série géométrique dérivée seconde convergente car $\left|\dfrac{1}{2}\right| < 1$ et de plus $\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-2} = \dfrac{2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3} = 16$

   et la seconde somme a été vue plus haut, donc X_2 admet une variance,

   de plus $E(X_2^2) = \sum_{k=2}^{+\infty} k^2\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-1} = \dfrac{1}{2}\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-2} + \sum_{k=2}^{+\infty} k\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-1} = \dfrac{1}{2} \times 16 + 3 = 11$

   donc d'après la formule de Kœnig-Huygens, $V(X_2) = E(X_2^2) - E(X_2)^2 = 11 - 3^2 = 2$