Visez la qualité : $0+0+0+0<0,5$ Sans calculatrice
Bon devoir !

Exercice 1 - quelques systèmes pour s'échauffer

1. Sans chercher à le résoudre, préciser de quelle nature est l'ensemble des solutions du système

$$(S_1) : \begin{cases} 9x+y-z &= 0 \\ -5x-2y+11z &= 0 \end{cases}$$

2. Résoudre le système

$$(S_2) : \begin{cases} x-y+z &= 1 \\ 2x+y-z &= 2 \\ x-2y+3z &= 0 \end{cases}$$

3. La matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ? Si oui, déterminer sa matrice inverse.

Exercice 2
On considère deux variables aléatoires X et Y, indépendantes et suivant la même loi donnée par :

$$P(X=0) = \frac{1}{4}, P(X=1) = \frac{1}{4} \text{ et } P(X=2) = \frac{1}{2}$$

On a donc également :

$$P(Y=0) = \frac{1}{4}, P(Y=1) = \frac{1}{4} \text{ et } P(Y=2) = \frac{1}{2}$$

On pose $S = X+Y$ et $T = XY$ et on admet que S et T sont des variables aléatoires.

1. **a.** Déterminer l'ensemble des valeurs prises par S, puis déterminer la loi de S

b. En déduire que l'espérance de S est égale à $\frac{5}{2}$

c. Retrouver ce résultat en utilisant la relation qui définit S

2. **a.** Déterminer l'ensemble des valeurs prises par T

b. Vérifier que $P(T=0) = \frac{7}{16}$, puis déterminer la loi de T

c. En déduire que l'espérance de T est égale à $\frac{25}{16}$

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$\forall x \in]0;+\infty[, \qquad f(x) = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}}$$

On rappelle que $2 < e < 3$

1. Montrer que la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0

2. **a.** Montrer que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que, pour tout réel x de $]0;+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{(x-1)}{2x} f(x)$$

b. Dresser le tableau de variations de f et déterminer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

c. Tracer l'allure de la courbe représentative de f

d. Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'équation $f(x) = n$, d'inconnue x dans $]0;+\infty[$, possède exactement deux solutions u_n et v_n, avec :

$$0 < u_n < 1 < v_n$$

3. **a.** Montrer que la suite $(v_n)_{n\geqslant 2}$ est croissante.

b. Montrer par l'absurde que la suite $(v_n)_{n\geqslant 2}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$

4. **a.** Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est décroissante.

b. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ converge.

5. Dans les questions qui suivent, on note ℓ la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$

a. Montrer par l'absurde que $\ell = 0$

b. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 u_n = 1$

6. **a.** Montrer que $\forall n \geqslant 2, u_n \leqslant \dfrac{e}{n^2}$

b. Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{e}{n^2}$ converge *(on rappelle que* $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ *converge).*

c. En déduire la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n$

7. Soient n un entier supérieur ou égal à 2 et ε un réel strictement positif.
On cherche à déterminer une valeur approchée de u_n avec une marge d'erreur inférieure ou égale à ε
On rappelle pour cela le principe de l'algorithme de dichotomie

- On initialise deux variables a et b en leur affectant respectivement les valeurs 0 et 1
- Tant que $b - a > \varepsilon$, on répète les opérations suivantes.
  On considère le milieu c du segment $[a, b]$. Par monotonie de f sur $]0, 1]$, en distinguant les cas $f(c) \leqslant n$ et $f(c) > n$, on peut déterminer si u_n appartient à l'intervalle $[a, c]$ ou à l'intervalle $[c, b]$
  Selon le cas, on met alors à jour la valeur de a ou de b pour se restreindre au sous-intervalle approprié.
- On renvoie finalement la valeur $\dfrac{a+b}{2}$, qui constitue une valeur approchée de u_n à ε près.

a. Recopier et compléter la fonction en langage Python ci-contre, prenant en entrée un entier `n` supérieur ou égal à 2 et un réel strictement positif `eps`, et renvoyant une valeur approchée de u_n à `eps` près en appliquant l'algorithme décrit ci-dessus.

```
import numpy as np

def approx_u(n, eps):
  a = 0
  b = 1
  while __________ :
    c = (a+b)/2
    if np.exp(c/2)/np.sqrt(c) < n:
      __________
    else:
      __________
  return (a+b)/2
```

b. Ecrire une fonction en langage Python, nommée `sp`, prenant en entrée un entier `N` supérieur ou égal à 2 et un réel strictement positif `eps` et renvoyant une valeur approchée de la somme $\sum\limits_{n=2}^{N} u_n$ à `eps` près.

On pourra faire appel à la fonction `approx_u` *définie à la question précédente.*

Problème 1

Les parties peuvent être traitées de manière indépendante en admettant des résultats de la partie 1 pour faire la partie 2.

Partie 1 : étude d'une variable aléatoire

Les sommets d'un carré sont numérotés $1, 2, 3$ et 4 de telle façon que les côtés du carré relient le sommet 1 au sommet 2, le sommet 2 au sommet 3, le sommet 3 au sommet 4 et le sommet 4 au sommet 1
Un mobile se déplace aléatoirement sur les sommets de ce carré selon le protocole suivant :
- au départ, c'est à dire à l'instant 0, le mobile est sur le sommet 1 ;
- lorsque le mobile est à un instant donné sur un sommet, il se déplace à l'instant suivant sur l'un quelconque des trois autres sommets, et ceci de façon équiprobable.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire égale au numéro du sommet sur lequel se situe le mobile à l'instant n. D'après le premier des deux points précédents, on a donc $X_0 = 1$

1. Reconnaitre la loi de X_1, ainsi que l'espérance de la variable X_1
Avec Python, écrire un programme qui permet de simuler $1\,000$ réalisations de X_1 et qui représente les fréquences d'apparition de chacune des valeurs obtenues à l'aide d'un diagramme en bâtons.

On admet pour la suite que la loi de X_2 est donnée par :

$$P(X_2 = 1) = \frac{1}{3} \quad P(X_2 = 2) = P(X_2 = 3) = P(X_2 = 4) = \frac{2}{9}$$

2. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, donner, en justifiant, l'ensemble des valeurs prises par X_n

3. **a.** Utiliser la formule des probabilités totales pour établir que :

$$\forall n \geqslant 2, P(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{3}(P(X_n = 2) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4))$$

b. Vérifier que cette relation reste valable pour $n = 0$ et $n = 1$

c. Justifier que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(X_n = 1) + P(X_n = 2) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4) = 1$$

En déduire l'égalité : $\forall n \in \mathbb{N}, P(X_{n+1} = 1) = -\frac{1}{3}P(X_n = 1) + \frac{1}{3}$

d. Etablir alors que : $\forall n \in \mathbb{N}, P(X_n = 1) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$

4. **a.** En procédant de la même façon qu'à la question précédente, montrer que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{3}(P(X_n = 1) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4))$$

b. En déduire une relation entre $P(X_{n+1} = 2)$ et $P(X_n = 2)$

c. Montrer enfin que : $\forall n \in \mathbb{N}, P(X_n = 2) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$

On admet que l'on a également : $\forall n \in \mathbb{N}, P(X_n = 3) = P(X_n = 4) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$

5. Déterminer, pour tout entier naturel n, l'espérance $E(X_n)$ de la variable aléatoire X_n

6. Calculer les limites de $P(X_n = 1), P(X_n = 2), P(X_n = 3), P(X_n = 4)$ et $E(X_n)$, quand n tend vers $+\infty$, et interpréter les résultats.

Partie 2 : calcul des puissances d'une matrice A

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose : $U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \\ P(X_n = 3) \\ P(X_n = 4) \end{pmatrix}$ et $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. **a.** Montrer (grâce à certains résultats de la **partie 1**) que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = AU_n$
Puis montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = A^n U_0$

b. En déduire la première colonne de A^n

2. Expliquer comment choisir la position du mobile au départ pour trouver les trois autres colonnes de la matrice A^n, puis écrire ces trois colonnes.

Partie 3 : une deuxième méthode de calcul des puissances de A

On considère les matrices I et J suivantes : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Déterminer les réels a et b tels que $A = aI + bJ$
2. **a.** Calculer J^2 puis établir que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, J^k = 4^{k-1}J$

   b. En admettant que la formule du binôme de Newton $(M+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} M^{n-k}N^k$ est valable lorsque les matrices M et N commutent, en déduire, pour tout entier n non nul, l'expression de A^n comme combinaison linéaire de I et J

   c. Vérifier que l'expression trouvée reste valable pour $n = 0$

Partie 4 : une troisième méthode de calcul des puissances de A

Soit P la matrice définie par : $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}
2. Déterminer la matrice D telle que $D = P^{-1}AP$
3. Montrer que $A = PDP^{-1}$
4. Montrer que pour tout nombre entier naturel n, on a : $A^n = PD^nP^{-1}$
5. Retrouver pour tout nombre entier naturel n l'expression de A^n