

Corrigé

Total sur 67 points

Exercice 1 - quelques systèmes pour s'échauffer

4 points

1. Sans chercher à le résoudre, préciser de quelle nature est l'ensemble des solutions du système

0,5 point

$$(S_1) : \begin{cases} 9x + y - z = 0 \\ -5x - 2y + 11z = 0 \end{cases}$$

Il s'agit d'un système non carré, donc il admet soit une infinité de solutions, soit aucune solution.
Par ailleurs, c'est un système homogène, donc $(0, 0, 0)$ est solution du système qui admet donc au moins une solution.
De fait ce système admet une infinité de solutions.

$$2. \text{ Résoudre le système } (S_2) : \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \\ x - 2y + 3z = 0 \end{cases} \quad 1,5 \text{ points}$$

On utilise la méthode des « inconnues invisibles »

$$(S_2) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{array} \right) \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{array} \right) L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2$$

$$(S_2) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) L_3 \leftrightarrow L_3 + L_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 1 \\ y - z = 0 \\ z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + y - z \\ y = z \\ z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = -1 \end{cases}$$

donc (S_2) admet $(1; -1; -1)$ pour unique solution.

$$3. \text{ La matrice } M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ est-elle inversible? Si oui, déterminer sa matrice inverse.} \quad 2 \text{ points}$$

On utilise la méthode des « inconnues invisibles »

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{matrix} L_1 \leftrightarrow L_3 \\ L_1 \leftrightarrow L_3 \end{matrix} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) L_1 \leftarrow L_1 + L_2$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) L_2 \leftrightarrow L_3 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 1 \end{array} \right) L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$$

A ce stade, nous avons déjà démontré que la matrice M est inversible car elle a été réduite en une matrice triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux sont tous non nuls.

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -1 \end{array} \right) L_3 \leftarrow -L_3 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -1 \end{array} \right) L_1 \leftarrow L_1 + L_3$$

$$\text{donc } M^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Option 2 : en fait l'inversion du système est plus simple ici car on peut raisonner uniquement par substitution :

$$\begin{cases} y = x' \\ -x + 2y = y' \\ x - z = z' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x' \\ x = 2y - y' \\ z = x - z' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x' \\ x = 2x' - y' \\ z = 2x' - y' - z' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2x' - y' \\ y = x' \\ z = 2x' - y' - z' \end{cases}$$

Exercice 2

8 points

On considère deux variables aléatoires X et Y , indépendantes et suivant la même loi donnée par :

$$P(X=0) = \frac{1}{4}, P(X=1) = \frac{1}{4} \text{ et } P(X=2) = \frac{1}{2}$$

On a donc également : $P(Y=0) = \frac{1}{4}, P(Y=1) = \frac{1}{4} \text{ et } P(Y=2) = \frac{1}{2}$

On pose $S = X + Y$ et $T = XY$ et on admet que S et T sont des variables aléatoires.

1. a. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par S , puis déterminer la loi de S

2,5 points

$S(\Omega) = \llbracket 0, 4 \rrbracket$ car $0 \leq X \leq 2$ et $0 \leq Y \leq 2$ donc $0 \leq X + Y \leq 4$ i.e. $0 \leq S \leq 4$

et toutes les valeurs intermédiaires sont atteintes car $[X=0] \cap [Y=0] \Rightarrow S=0$, $[X=1] \cap [Y=0] \Rightarrow S=1$, $[X=2] \cap [Y=0] \Rightarrow S=2$, $[X=2] \cap [Y=1] \Rightarrow S=3$ et $[X=2] \cap [Y=2] \Rightarrow S=4$

$$P(S=0) = P([X=0] \cap [Y=0]) = P(X=0) \times P(Y=0) = \frac{1}{16} \quad \text{par indépendance des variables } X \text{ et } Y$$

$$P(S=1) = P((([X=0] \cap [Y=1]) \cup ([X=1] \cap [Y=0]))) \text{ et incompatib. de } [X=0] \cap [Y=1] \text{ et } [X=1] \cap [Y=0]$$

$$= P(X=0) \times P(Y=1) + P(X=1) \times P(Y=0) = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{8}$$

$$P(S=2) = P((([X=0] \cap [Y=2]) \cup ([X=2] \cap [Y=0]) \cup ([X=1] \cap [Y=1])))$$

$$= P(X=0) \times P(Y=2) + P(X=2) \times P(Y=0) + P(X=1) \times P(Y=1) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$$

$$P(S=3) = P((([X=1] \cap [Y=2]) \cup ([X=2] \cap [Y=1])))$$

$$= P(X=1) \times P(Y=2) + P(X=2) \times P(Y=1) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$

$$P(S=4) = P([X=2] \cap [Y=2]) = P(X=2) \times P(Y=2) = \frac{1}{4}$$

En résumé :

i	0	1	2	3	4
$P(S=i)$	1/16	1/8	5/16	1/4	1/4

- b. En déduire que l'espérance de S est égale à $\frac{5}{2}$

1 point

S est une variable finie donc elle admet une espérance et

$$E(S) = \sum_{k=0}^4 kP(S=k) = 0 \times \frac{1}{16} + 1 \times \frac{1}{8} + 2 \times \frac{5}{16} + 3 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8} + \frac{5}{8} + \frac{3}{4} + 1 = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}$$

- c. Retrouver ce résultat en utilisant la relation qui définit S

1 point

On sait aussi que $S = X + Y$ donc par linéarité $E(S) = E(X) + E(Y)$

$$\text{or } E(X) = E(Y) = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{4} \text{ donc } E(S) = 2 \times \frac{5}{4} = \frac{5}{2}$$

2. a. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par T

0,5 point

$T(\Omega) = \{0, 1, 2, 4\}$ car $0 \leq X \leq 2$ et $0 \leq Y \leq 2$ donc $0 \leq XY \leq 4$ i.e. $0 \leq T \leq 4$

et les valeurs $\{0, 1, 2, 4\}$ sont atteintes car $[X=0] \cap [Y=0] \Rightarrow T=0$, $[X=1] \cap [Y=1] \Rightarrow T=1$, $[X=2] \cap [Y=1] \Rightarrow T=2$ et $[X=2] \cap [Y=2] \Rightarrow T=4$ mais 3 ne peut pas être atteint.

- b. Vérifier que $P(T=0) = \frac{7}{16}$, puis déterminer la loi de T

2 points

$[T=0] = [X=0] \cup [Y=0]$, mais attention, ici, les événements ne sont pas incompatibles !

$$P(T=0) = P(X=0) + P(Y=0) - P([X=0] \cap [Y=0]) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{7}{16} \quad (X \text{ et } Y \text{ sont toujours indépendantes})$$

$$P(T=1) = P([X=1] \cap [Y=1]) = P(X=1) \times P(Y=1) = \frac{1}{16}$$

$$P(T=2) = P((([X=1] \cap [Y=2]) \cup ([X=2] \cap [Y=1])))$$

$$= P(X=1) \times P(Y=2) + P(X=2) \times P(Y=1) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$

$$P(T=4) = P([X=2] \cap [Y=2]) = P(X=2) \times P(Y=2) = \frac{1}{4}$$

En résumé :

j	0	1	2	4
$P(T=j)$	7/16	1/16	1/4	1/4

- c. En déduire que l'espérance de T est égale à $\frac{25}{16}$

1 point

T est une variable finie donc elle admet une espérance et

$$E(T) = 0 \times \frac{7}{16} + 1 \times \frac{1}{16} + 2 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{16} + \frac{8}{16} + \frac{16}{16} = \frac{25}{16}$$

Exercice 3

20 points

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $\forall x \in]0; +\infty[, f(x) = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}}$

On rappelle que $2 < e < 3$

1. Montrer que la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0

1 point

On étudie la limite du taux d'accroissement : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ par opération (« $\frac{1}{0^+}$ »)

2. a. Montrer que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et que, pour tout réel x de $]0; +\infty[: f'(x) = \frac{(x-1)}{2x} f(x)$

2 points

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ donc par composition puis quotient, f est dérivable sur $]0; +\infty[$. De plus, f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u(x) = e^{\frac{x}{2}}$ et $v(x) = \sqrt{x}$

$$\text{de fait } u'(x) = \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} \text{ et } v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ et } f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$\text{donc } \forall x > 0, f'(x) = \frac{\frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} \sqrt{x} - \frac{e^{\frac{x}{2}}}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{\frac{1}{2} x e^{\frac{x}{2}} - \frac{e^{\frac{x}{2}}}{2}}{x} = \frac{\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right) \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}}}{x} = \frac{\frac{x-1}{2}}{x} \times \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}} = \frac{x-1}{2x} f(x)$$

- b. Dresser le tableau de variations de f et déterminer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

1,5 points

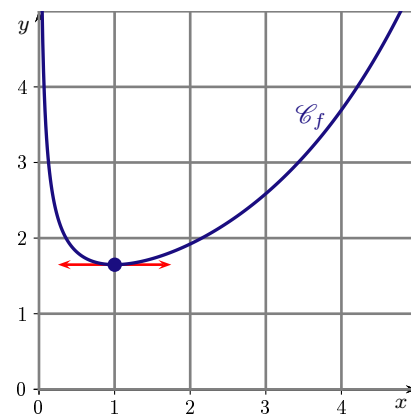
Pour $x > 0, f(x) = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ par croissance comparée.

En 0, on a $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{x}{2}} = 1$, et $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0^+$ donc, par opération, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ (« $\frac{1}{0^+}$ »)

$\forall x > 0, f'(x) = \frac{x-1}{2x} f(x)$ donc $f'(x)$ est du signe de $x-1$ car $f(x) \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}}$ et x sont strictement positifs sur $]0; +\infty[$,

de plus $f(1) = \frac{e^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{1}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$ on en déduit les tableaux de signes et de variations :

x	0	1	$+\infty$
$x-1$		-	+
$f'(x)$		-	+
f	$+\infty$	$\sqrt{e}$	$+\infty$



- c. Tracer l'allure de la courbe représentative de f

1 point

On représente la fonction à l'aide du tableau de variations : $f(1)$ (sachant que $2 < e < 3 < 4 \Rightarrow \sqrt{2} < \sqrt{e} < \sqrt{3} < 2$), de plus la tangente est horizontale en ce point et enfin les limites.

Nota bene : la courbe donne plusieurs clés pour la suite de l'exercice. On voit bien que pour tout entier supérieur ou égal à deux, il existe deux antécédents (un sur $[0, 1]$ et un sur $[1, +\infty[$) et que plus l'entier augmente, plus l'antécédent sur $[0, 1]$ se rapproche de 0, et, a contrario, l'antécédent sur $[1, +\infty[$ se rapproche de $+\infty$

- d. Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'équation $f(x) = n$, d'inconnue x dans $]0; +\infty[$, possède exactement deux solutions u_n et v_n , avec : $0 < u_n < 1 < v_n$

2 points

Il s'agit bien sûr d'appliquer le théorème de bijection deux fois. Commençons par observer que, comme $2 < e < 3 < 4$, on a $\sqrt{e} < \sqrt{4} = 2$ et donc, pour tout entier $n \geq 2, n \in]\sqrt{e}, +\infty[$

comme f est continue et strictement décroissante sur $]0, 1[$, d'après le théorème de bijection, elle réalise une bijection de $]0, 1[$ sur $\left] \lim_{x \rightarrow 0} f(x), f(1) \right[=]\sqrt{e}, +\infty[$

en particulier, pour $n \geq 2$ alors $n \in]\sqrt{e}, +\infty[$ et donc n admet un unique antécédent par f dans $]0, 1[$, noté u_n

de même, sur $]1, +\infty[$, f est continue et strictement croissante et réalise donc une bijection de cet intervalle sur $\left]f(1), \lim_{x \rightarrow 0} f(x)\right[=]\sqrt{e}, +\infty[$ et n admet alors un unique antécédent par f sur $]1, +\infty[$ noté v_n
 finalement, l'équation $f(x) = n$ admet bien exactement deux solutions u_n et v_n telles que $0 < u_n < 1 < v_n$

3. a. Montrer que la suite $(v_n)_{n \geq 2}$ est croissante. 1,5 points

Toujours avec le théorème de bijection, en notant g la restriction de f à $]1, +\infty[$ et dont l'ensemble d'arrivée est $]\sqrt{e}, +\infty[$, alors comme vu plus haut, g est bijective et strictement
 de plus par définition $g(v_n) = f(v_n) = n$ et $g(v_{n+1}) = f(v_{n+1}) = n+1$ donc $g(v_n) < g(v_{n+1})$
 et par propriété sur la réciproque g^{-1} est strictement croissante donc $g^{-1}(g(v_n)) < g^{-1}(g(v_{n+1}))$ i.e. $v_n < v_{n+1}$
 donc $(v_n)_{n \geq 2}$ est (strictement) croissante.

- b. Montrer par l'absurde que la suite $(v_n)_{n \geq 2}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ 1,5 points

Supposons que (v_n) soit majorée, alors comme elle est croissante, d'après le théorème de convergence monotone elle converge et on note ℓ sa limite
 de plus $\forall n \geq 2, v_n \geq 1$ donc par passage à la limite dans l'inégalité $\ell \geq 1$
 mais alors, comme $f(v_n) = n$, on a d'une part $v_n \rightarrow \ell \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f(v_n) = f(\ell)$ car f est continue
 et d'autre part $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ ce qui est contradictoire, donc (v_n) n'est pas majorée et étant toujours croissante, d'après le théorème de la limite monotone, elle diverge vers $+\infty$

4. a. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est décroissante. 1 point

On raisonne de manière complètement analogue à la question 3.a., avec h la restriction de f à $]0, 1[$ dont l'ensemble d'arrivée est $]\sqrt{e}, +\infty[$, alors est h bijective et strictement décroissante et $h(u_{n+1}) = n+1 < n = h(u_n)$ donc $h^{-1}(h(u_{n+1})) > h^{-1}(h(u_n))$ i.e. $u_{n+1} > u_n$ et la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est bien décroissante.

- b. En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ converge. 0,5 point

$(u_n)_{n \geq 2}$ est minorée (par 0 par exemple) et décroissante donc d'après le théorème de la limite monotone, $(u_n)_{n \geq 2}$ converge.

5. Dans les questions qui suivent, on note ℓ la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 2}$

- a. Montrer par l'absurde que $\ell = 0$ 1,5 points

En notant ℓ la limite de $(u_n)_{n \geq 2}$, supposons que $\ell \neq 0$
 alors comme précédemment, comme $\forall n \geq 2, u_n \in [0, 1]$ alors $\ell \in [0, 1]$ par passage à la limite dans l'inégalité
 de plus si $\ell \neq 0$ alors $\ell > 0$ et donc $\ell \in \mathcal{D}_f$
 donc par continuité de f , $f(u_n) \rightarrow f(\ell)$
 or $\forall n \geq 2, f(u_n) = n$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = +\infty$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$
 d'où la contradiction, donc $u_n \rightarrow 0$

- b. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 u_n = 1$ 1 point

Par définition de u_n , $f(u_n) = n$ et donc $e^{\frac{u_n}{2}} = \sqrt{u_n} n \Rightarrow \left(e^{\frac{u_n}{2}}\right)^2 = (\sqrt{u_n} n)^2 \Rightarrow e^{u_n} = n^2 u_n$
 comme $u_n \rightarrow 0$, par continuité de l'exponentielle, on a $e^{u_n} \rightarrow 1$ et de fait $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 u_n = 1$

6. a. Montrer que $\forall n \geq 2, u_n \leq \frac{e}{n^2}$ 1 point

Grâce à la même relation : $e^{u_n} = n^2 u_n$, on peut écrire pour $n \geq 2, u_n = \frac{e^{u_n}}{n^2}$
 or $\forall n \geq 2, u_n \leq 1$ donc en composant par l'exponentielle qui est croissante, on trouve $e^{u_n} \leq e^1$ i.e. $e^{u_n} \leq e$
 et donc $\frac{e^{u_n}}{n^2} \leq \frac{e}{n^2}$ i.e. $u_n \leq \frac{1}{n^2}$

- b. Montrer que $\sum_{n \geq 2} \frac{e}{n^2}$ converge (on rappelle que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge). 1 point

$\sum_{n \geq 2} \frac{e}{n^2} = e \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^2}$ donc par opérations sur les séries si $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge alors $\sum_{n \geq 1} \frac{e}{n^2}$ converge et donc $\sum_{n \geq 2} \frac{e}{n^2}$
 converge (de plus $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{e}{n^2} = e \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$)

c. En déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 2} u_n$

1 point

$\sum_{n \geq 2} u_n$ et $\sum_{n \geq 2} \frac{e}{n^2}$ sont des séries à termes positifs ($\forall n \geq 2, u_n > 0$ et $\sum_{n \geq 2} \frac{e}{n^2}$ converge d'après la question précédente, donc $\sum_{n \geq 2} u_n$ d'après le théorème de comparaison sur les séries à termes positifs

7. Soient n un entier supérieur ou égal à 2 et ε un réel strictement positif.

On cherche à déterminer une valeur approchée de u_n avec une marge d'erreur inférieure ou égale à ε

On rappelle pour cela le principe de l'algorithme de dichotomie

- On initialise deux variables a et b en leur affectant respectivement les valeurs 0 et 1

- Tant que $b - a > \varepsilon$, on répète les opérations suivantes.

On considère le milieu c du segment $[a, b]$. Par monotonie de f sur $]0, 1]$, en distinguant les cas $f(c) \leq n$ et $f(c) > n$, on peut déterminer si u_n appartient à l'intervalle $[a, c]$ ou à l'intervalle $[c, b]$

Selon le cas, on met alors à jour la valeur de a ou de b pour se restreindre au sous-intervalle approprié.

- On renvoie finalement la valeur $\frac{a+b}{2}$, qui constitue une valeur approchée de u_n à ε près.

a. Recopier et compléter la fonction en langage Python ci-contre, prenant en entrée un entier n supérieur ou égal à 2 et un réel strictement positif eps , et renvoyant une valeur approchée de u_n à eps près en appliquant l'algorithme décrit ci-dessus.

1 point

```
import numpy as np

def approx_u(n, eps):
    a = 0
    b = 1
    while ----- :
        c = (a+b)/2
        if np.exp(c/2)/np.sqrt(c) < n:
            -----
        else:
            -----
    return (a+b)/2
```

Le sujet nous rappelle comment fonctionne l'algorithme de recherche d'une solution par dichotomie. On divise donc l'intervalle de recherche en 2 et poursuivant la recherche à gauche ou à droite, selon que $f(c) > n$ ou non, tant que la taille de l'intervalle $(b - a)$ est supérieure à la précision voulue pour l'estimation. Si $f(c) < n$, comme f est strictement décroissante sur $]0, 1[$ où se trouve u_n , c'est que notre solution est dans la moitié de gauche. Ceci donne le programme suivant

```
import numpy as np
def approx_u(n, eps) :
    a=0
    b=1
    while (b-a) > eps :
        c=(a+b)/2 # milieu de l'intervalle
        if np.exp(c/2)/np.sqrt(c) < n : # si f(c) < n
            b=c # alors on cherche à gauche
        else :
            a=c # sinon on cherche à droite
    return (a+b)/2
```

b. Ecrire une fonction en langage Python, nommée sp , prenant en entrée un entier N supérieur ou égal à 2 et un réel strictement positif eps et renvoyant une valeur approchée de la somme $\sum_{n=2}^N u_n$ à eps près.

On pourra faire appel à la fonction approx_u définie à la question précédente.

1,5 points

Le programme de la question précédente permet de calculer u_n pour tout n , avec la précision souhaitée. Une boucle for permet facilement de calculer la somme des u_n . Comme l'erreur est cumulée $N - 1$ fois (somme de 2 à n , il y a donc $N - 1$ termes), il suffit de choisir une erreur de $\text{eps}/(N - 1)$ pour que l'imprécision cumulée soit de eps au plus.

```
def sp(eps, N):
    s=approx_u(2, eps/(N-1))
    for k in range(3, N+1) :
        s=s+approx_u(k, eps/(N-1))
    return s

# option 2 : avec une liste
def sp(eps, N):
    return sum([approx_u(k, eps/(N-1)) for k in range(2, N+1)])
```

Problème 1

35 points

Les parties peuvent être traitées de manière indépendante en admettant des résultats de la partie 1 pour faire la partie 2.

Partie 1 : étude d'une variable aléatoire

15,5 points

Les sommets d'un carré sont numérotés 1, 2, 3 et 4 de telle façon que les côtés du carré relient le sommet 1 au sommet 2, le sommet 2 au sommet 3, le sommet 3 au sommet 4 et le sommet 4 au sommet 1

Un mobile se déplace aléatoirement sur les sommets de ce carré selon le protocole suivant :

- au départ, c'est à dire à l'instant 0, le mobile est sur le sommet 1 ;
- lorsque le mobile est à un instant donné sur un sommet, il se déplace à l'instant suivant sur l'un quelconque des trois autres sommets, et ceci de façon équiprobable.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire égale au numéro du sommet sur lequel se situe le mobile à l'instant n . D'après le premier des deux points précédents, on a donc $X_0 = 1$

1. Reconnaître la loi de X_1 , ainsi que l'espérance de la variable X_1

2,5 points

Avec Python, écrire un programme qui permet de simuler 1000 réalisations de X_1 et qui représente les fréquences d'apparition de chacune des valeurs obtenues à l'aide d'un diagramme en bâtons.

Comme le mobile ne reste pas sur le même sommet, à l'instant 1 il va se trouver sur un des sommets 2, 3 ou 4 et ce de manière équiprobable. Donc $X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}(2;4)$, i.e. X_1 suit la loi uniforme sur l'intervalle d'entier $\llbracket 2;4 \rrbracket$

(donc $X_1(\Omega) = \llbracket 2;4 \rrbracket$ et $\forall k \in \llbracket 2;4 \rrbracket, P(X_1 = k) = \frac{1}{3}$ et) par propriété du cours $E(X_1) = \frac{2+4}{2} = 3$

Avec Python, on simule cela avec la commande `randint` de la librairie `numpy.random` (attention, dans la commande, le deuxième entier est exclu). On crée ensuite un compteur comportant 3 colonnes et on parcourt toutes la liste pour compter le nombre d'apparition de chaque valeur (attention un 2 est compté dans la colonne 0, un 3 dans la 1 et un 4 dans la 2). Enfin on divise par 1000 pour obtenir des fréquences et on représente avec `plt.bar` :

```
import numpy.random as rd
import matplotlib.pyplot as plt
X_1=rd.randint(2,5,1000)
y=np.zeros(3)
for i in range(0,1000) :
    a=x[i]
    y[a-2]=y[a-2]+1
y=y/1000
abs=[2,3,4]
plt.bar(abs,y)
plt.show()
```

On admet pour la suite que la loi de X_2 est donnée par :

$$P(X_2 = 1) = \frac{1}{3} \quad P(X_2 = 2) = P(X_2 = 3) = P(X_2 = 4) = \frac{2}{9}$$

2. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, donner, en justifiant, l'ensemble des valeurs prises par X_n

0,5 point

A partir de l'instant 2, comme l'énoncé nous indique avec la loi de X_2 , le mobile peut se trouver sur n'importe quel sommet avec une probabilité non nulle. De fait, ce sera également le cas à l'instant suivant, puis par « récurrence immédiate » à tous les instants suivants, donc $\forall n \geq 2, X_n(\Omega) = \llbracket 1,4 \rrbracket$

3. a. Utiliser la formule des probabilités totales pour établir que :

1,5 points

$$\forall n \geq 2, P(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{3}(P(X_n = 2) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4))$$

Pour $n \geq 2$, les événements $[X_n = 1], [X_n = 2], [X_n = 3]$ et $[X_n = 4]$ forment un système complet d'événements comme nous l'avons vu ci-dessus, donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(X_{n+1} = 1) = P(X_n = 1)P(X_{n+1} = 1|X_n = 1) + P(X_n = 2)P(X_{n+1} = 1|X_n = 2) + P(X_n = 3)P(X_{n+1} = 1|X_n = 3) + P(X_n = 4)P(X_{n+1} = 1|X_n = 4)$$

or $P(X_{n+1} = 1|X_n = 1) = 0$ car le mobile ne reste pas sur le même sommet d'un instant à un autre et

$P(X_{n+1} = 1|X_n = 2) = P(X_{n+1} = 1|X_n = 3) = P(X_{n+1} = 1|X_n = 4) = \frac{1}{3}$ car si le mobile se trouve sur le sommet 2, 3 ou 4 à l'instant n , il se trouvera de manière équiprobable sur un des trois autres sommets à l'instant suivant et entre autres, il aura une chance sur trois de se trouver sur le sommet 1

$$\text{donc } P(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{3}(P(X_n = 2) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4))$$

Nota bene : l'hypothèse $n \geq 2$ permet d'éviter les cas où certaines probabilités sont nulles.

- b. Vérifier que cette relation reste valable pour $n = 0$ et $n = 1$

1 point

Pour $n = 0$: alors $P(X_{n+1} = 1) = P(X_1 = 1) = 0$ et

$\frac{1}{3}(P(X_n = 2) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4)) = \frac{1}{3}(P(X_0 = 2) + P(X_0 = 3) + P(X_0 = 4)) = 0$ car à l'instant 0 le mobile se trouve en 1 et à l'instant 1, il se trouve en 2, 3 ou 4, donc l'égalité est bien vérifiée.

Pour $n = 1$: alors $P(X_{n+1} = 1) = P(X_2 = 1) = \frac{1}{3}$ d'après l'énoncé et

$$\frac{1}{3}(P(X_n = 2) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4)) = \frac{1}{3}(P(X_1 = 2) + P(X_1 = 3) + P(X_1 = 4)) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

(d'après la question 1.) donc l'égalité est bien vérifiée.

- c. Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}, P(X_n = 1) + P(X_n = 2) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4) = 1$

1,5 points

En déduire l'égalité : $\forall n \in \mathbb{N}, P(X_{n+1} = 1) = -\frac{1}{3}P(X_n = 1) + \frac{1}{3}$

Soit $n \in \mathbb{N}$, d'après la question 2. $X_n(\Omega) = [1; 4]$, donc par propriété du cours $\sum_{k=1}^4 P(X_n = k) = 1$

d'où la première égalité demandée.

on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}, P(X_n = 2) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4) = 1 - P(X_n = 1)$

or d'après 3.a. et 3.b. (pour $n = 0$ et $n = 1$), $P(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{3}(P(X_n = 2) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4))$

donc $P(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{3}(1 - P(X_n = 1)) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}P(X_n = 1)$

- d. Etablir alors que : $\forall n \in \mathbb{N}, P(X_n = 1) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$

2 points

La suite des $(P(X_n = 1))_{n \in \mathbb{N}}$ est donc une suite arithmético-géométrique, pour simplifier l'écriture, on peut poser pour $n \in \mathbb{N}, u_n = P(X_n = 1)$ et donc d'après la question précédente, on a $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = -\frac{1}{3}u_n + \frac{1}{3}$

on cherche dans un premier temps un point fixe :

$$\alpha = -\frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{4}{3}\alpha = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 4\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{4}$$

on introduit alors la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $v_n = u_n - \frac{1}{4}$

soit $n \in \mathbb{N}$, par définition $v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{4}$

$$\text{et donc par définition de } u_n, v_{n+1} = -\frac{1}{3}u_n + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{3}u_n + \frac{4}{12} - \frac{3}{12} = -\frac{1}{3}u_n + \frac{1}{12} = -\frac{1}{3}\left(u_n - \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{3}v_n$$

donc $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison $-\frac{1}{3}$

donc $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n v_0$, or $v_0 = u_0 - \frac{1}{4}$ et $u_0 = P(X_0 = 1) = 1$ donc $v_0 = \frac{3}{4}$

et $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$ or $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = v_n + \frac{1}{4}$ donc $u_n = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$

4. a. En procédant de la même façon qu'à la question précédente, montrer que l'on a :

1 point

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{3}(P(X_n = 1) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4))$$

Comme à la question 3.a., la formule des probabilités totales nous donne,

$$\forall n \geq 2, P(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{3}(P(X_n = 1) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4))$$

puis comme à la question 3.b., on la vérifie pour $n = 0$ et $n = 1$

Pour $n = 0$: alors $P(X_{n+1} = 2) = P(X_1 = 2) = \frac{1}{3}$ et

$$\frac{1}{3}(P(X_n = 1) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4)) = \frac{1}{3}(P(X_0 = 1) + P(X_0 = 3) + P(X_0 = 4)) = \frac{1}{3}(1 + 0 + 0) = \frac{1}{3}$$

car à l'instant 0 le mobile se trouve en 1 et à l'instant 1, il se trouve en 2, 3 ou 4 avec une probabilité de $\frac{1}{3}$, donc l'égalité est bien vérifiée.

Pour $n = 1$: alors $P(X_{n+1} = 2) = P(X_2 = 2) = \frac{2}{9}$ d'après l'énoncé et

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}(P(X_n = 1) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4)) &= \frac{1}{3}(P(X_1 = 1) + P(X_1 = 3) + P(X_1 = 4)) = \frac{1}{3}\left(0 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9} \text{ (d'après la question 1.) donc l'égalité est bien vérifiée.} \end{aligned}$$

- b. En déduire une relation entre $P(X_{n+1} = 2)$ et $P(X_n = 2)$

1 point

De même qu'à la question 3.c., $\forall n \in \mathbb{N}, P(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{3}(P(X_n = 1) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4))$

or $\forall n \in \mathbb{N}, P(X_n = 1) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4) = 1 - P(X_n = 2)$

donc $P(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{3}(1 - P(X_n = 2)) = -\frac{1}{3}P(X_n = 2) + \frac{1}{3}$

c. Montrer enfin que : $\forall n \in \mathbb{N}, P(X_n = 2) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$

1 point

Donc $P(X_n = 2)$ suit la même relation arithmético-géométrique que $P(X_n = 1)$, la seule différence sera le premier terme de la suite auxiliaire géométrique. En l'appelant (w_n) cette fois, on aura à nouveau :

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n w_0, \text{ mais avec } w_0 = P(X_2 = 0) - \frac{1}{4} = 0 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$$

$$\text{donc } \forall n \in \mathbb{N}, w_n = -\frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n \text{ puis } P(X_n = 2) = w_n + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

On admet que l'on a également : $\forall n \in \mathbb{N}, P(X_n = 3) = P(X_n = 4) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$

5. Déterminer, pour tout entier naturel n , l'espérance $E(X_n)$ de la variable aléatoire X_n

2 points

Par définition de l'espérance, car $\forall n \geq 2, X_n(\Omega) = \llbracket 1; 4 \rrbracket, \forall n \geq 2, E(X_n) = \sum_{k=1}^4 kP(X_n = k)$

et cette formule est en fait valable pour $n = 0$ (ce qui donne $E(X_0) = 1 + 0 + 0 + 0 = 1$, ce qui correspond à la loi certaine ici) et $n = 1$ (ce qui donne $E(X_1) = 0 + \frac{1}{3}(2 + 3 + 4) = 3$ comme vu à la question 1.)

donc d'après les questions 3.d., 4.c. et l'énoncé

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, E(X_n) &= P(X_n = 1) + 2P(X_n = 2) + 3P(X_n = 3) + 4P(X_n = 4) \\ &= P(X_n = 1) + 2P(X_n = 2) + 3P(X_n = 2) + 4P(X_n = 2) = P(X_n = 1) + 9P(X_n = 2) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n + 9 \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n \right] = \frac{10}{4} + \left(\frac{3}{4} - \frac{9}{4}\right) \left(-\frac{1}{3}\right)^n = \frac{5}{2} - \frac{6}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = \frac{5}{2} - \frac{3}{2} \left(-\frac{1}{3}\right)^n \end{aligned}$$

6. Calculer les limites de $P(X_n = 1), P(X_n = 2), P(X_n = 3), P(X_n = 4)$ et $E(X_n)$, quand n tend vers $+\infty$, et interpréter les résultats.

1,5 points

Tous ces termes font intervenir $\left(-\frac{1}{3}\right)^n$ et $\left(-\frac{1}{3}\right)^n \rightarrow 0$ (forme q^n avec $|q| < 1$)

donc sachant que $P(X_n = 1) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$, que $P(X_n = 2) = P(X_n = 3) = P(X_n = 4) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$

et enfin que $E(X_n) = \frac{5}{2} - \frac{3}{2} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$

alors $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = 2) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = 3) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = 4) = \frac{1}{4}$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n) = \frac{5}{2} = 2,5$

ce qui semble logique car, autant la situation de départ n'est pas équilibrée, autant petit à petit, il y a autant que chance que le mobile soit sur n'importe quel sommet, donc les probabilités s'équilibrent et de fait on se rapproche d'une loi uniforme sur $\llbracket 1; 4 \rrbracket$ ce qui donne une « espérance limite » de 2,5

Partie 2 : calcul des puissances d'une matrice A

$$\text{Pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \text{ on pose : } U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \\ P(X_n = 3) \\ P(X_n = 4) \end{pmatrix} \text{ et } A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

5 points

1. a. Montrer (grâce à certains résultats de la partie 1) que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = AU_n$

Puis montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = A^n U_0$

2 points

Pour $n \in \mathbb{N}$, par définition et d'après les questions 3.a., 3.b. et 4.a. et par analogie pour les lignes 3 et 4

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} P(X_{n+1} = 1) \\ P(X_{n+1} = 2) \\ P(X_{n+1} = 3) \\ P(X_{n+1} = 4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(P(X_n = 2) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4)) \\ \frac{1}{3}(P(X_n = 1) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4)) \\ \frac{1}{3}(P(X_n = 1) + P(X_n = 2) + P(X_n = 4)) \\ \frac{1}{3}(P(X_n = 1) + P(X_n = 2) + P(X_n = 3)) \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} P(X_n = 2) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4) \\ P(X_n = 1) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4) \\ P(X_n = 1) + P(X_n = 2) + P(X_n = 4) \\ P(X_n = 1) + P(X_n = 2) + P(X_n = 3) \end{pmatrix}$$

$$\text{de plus } AU_n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \\ P(X_n = 3) \\ P(X_n = 4) \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} P(X_n = 2) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4) \\ P(X_n = 1) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4) \\ P(X_n = 1) + P(X_n = 2) + P(X_n = 4) \\ P(X_n = 1) + P(X_n = 2) + P(X_n = 3) \end{pmatrix}$$

d'où l'égalité $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = AU_n$

Puis on procède par récurrence, pour $n \in \mathbb{N}$, on définit l'assertion $P(n) : U_n = A^n U_0$

Initiation : $P(0)$ est vraie $\Leftrightarrow U_0 = A^0 U_0 \Leftrightarrow U_0 = I_4 U_0 \Leftrightarrow U_0 = U_0$ ce qui est vrai donc $P(0)$ est vraie

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $P(n)$ est vraie

d'après la première partie de la question $U_{n+1} = AU_n$ et par hypothèse de récurrence, $u_n = A^n u_0$

donc $u_{n+1} = AA^n U_0 = A^{n+1} U_0$ c'est-à-dire que $P(n+1)$ est vraie

donc par théorème de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ est vraie et donc $U_n = A^n U_0$

b. En déduire la première colonne de A^n

1,5 points

Par définition de U_n et d'après la **partie 1**,

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix} \text{ de plus par définition } U_0 = \begin{pmatrix} P(X_0 = 1) \\ P(X_0 = 2) \\ P(X_0 = 3) \\ P(X_0 = 4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc en notant } A^n = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & \dots & \dots \\ a_2 & \dots & \dots & \dots \\ a_3 & \dots & \dots & \dots \\ a_4 & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \text{ alors } A^n U_0 = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & \dots & \dots \\ a_2 & \dots & \dots & \dots \\ a_3 & \dots & \dots & \dots \\ a_4 & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}$$

donc d'après l'égalité $U_n = A^n U_0$, on trouve $a_1 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$ et $a_2 = a_3 = a_4 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$

- 2.** Expliquer comment choisir la position du mobile au départ pour trouver les trois autres colonnes de la matrice A^n , puis écrire ces trois colonnes.

1,5 points

Il suffit de reproduire la même méthode, en considérant que le mobile se trouve sur le sommet 2 au départ pour connaître la deuxième colonne (puis le sommet 3 pour la colonne 3 et enfin le sommet 4 pour la colonne 4)

cela ne change par les relations de récurrence entre les probabilités, par contre cela change les premiers termes ($P(X_1 = 0), P(X_2 = 0) \dots$) mais par analogie, si le mobile se trouve au sommet 2 à l'instant 0 alors le sommet 2 jouera le rôle

du sommet 1 dans l'étude que nous venons de faire et on aura alors $P(X_n = 2) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$ et $P(X_n = 1) =$

$P(X_n = 2) = P(X_n = 3) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$ et finalement on comprend qu'on trouvera chaque coefficient de la diagonale

de A^n vaudra $\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$ et que tous les autres seront égaux à $\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$

Partie 3 : une deuxième méthode de calcul des puissances de A

$$\text{On considère les matrices } I \text{ et } J \text{ suivantes : } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

6 points

- 1.** Déterminer les réels a et b tels que $A = aI + bJ$

1 point

$$\text{De manière évidente } J - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 3A \text{ et donc } A = \frac{1}{3}(J - I) = -\frac{1}{3}I + \frac{1}{3}J$$

d'où le résultat avec $a = -\frac{1}{3}$ et $b = \frac{1}{3}$

2. a. Calculer J^2 puis établir que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, J^k = 4^{k-1}J$

1,5 points

$$J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \text{ le produit d'une ligne et d'une colonne suffit car tous les}$$

coefficients sont égaux (au produit de la même ligne et de la même colonne).

Puis on procède par récurrence, pour $k \in \mathbb{N}^*$, on définit l'assertion $P(k) : J^k = 4^{k-1}J$

Initiation : $P(1)$ est vraie $\Leftrightarrow J^1 = 4^{1-1}J \Leftrightarrow J = 4^0J \Leftrightarrow J = J$ ce qui est vrai donc $P(1)$ est vraie

Hérédité : soit $k \in \mathbb{N}^*$, supposons que $P(k)$ est vraie

alors par hypothèse de récurrence, $J^k = 4^{k-1}J$

donc $J^{k+1} = 4^{k-1}JJ = 4^{k-1}J^2 = 4^{k-1} \times 4J = 4^k J$ car $J^2 = 4J$, c'est-à-dire que $P(k+1)$ est vraie, d'où l'hérédité donc par théorème de récurrence, $\forall k \in \mathbb{N}^*, P(k)$ est vraie et donc $J^k = 4^{k-1}J$

- b. En admettant que la formule du binôme de Newton $(M+N)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} M^{n-k} N^k$ est valable lorsque les matrices

M et N commutent, en déduire, pour tout entier n non nul, l'expression de A^n comme combinaison linéaire de I et J

3 points

D'après la question 1.a., $A = -\frac{1}{3}I + \frac{1}{3}J$ et de plus I et J commutent car $IJ = J$ et $JI = I$

donc d'après la formule du binôme donnée par l'énoncé : $A^n = \left(-\frac{1}{3}I + \frac{1}{3}J\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(-\frac{1}{3}I\right)^{n-k} \left(\frac{1}{3}J\right)^k$

$$\begin{aligned} \text{donc } A^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-k} I^{n-k} \left(\frac{1}{3}\right)^k J^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k} \left(\frac{1}{3}\right)^k I^{n-k} J^k \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \left(\frac{1}{3}\right)^n J^k = \left(\frac{1}{3}\right)^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} J^k = \left(\frac{1}{3}\right)^n \left[\binom{n}{0} (-1)^{n-0} J^0 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} J^k \right] \end{aligned}$$

par relation de Chasles

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{1}{3}\right)^n \left[(-1)^n I + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} 4^{k-1} J \right] \text{ car } \forall k \in \mathbb{N}^*, J^k = 4^{k-1}J \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^n \left[(-1)^n I + \left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} 4^{k-1} \right) J \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{or } \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} 4^{k-1} &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} 4^k = \frac{1}{4} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} 4^k - (-1)^n \right) = \frac{1}{4} ((-1+4)^n - (-1)^n) \\ &= \frac{1}{4} (3^n - (-1)^n) \end{aligned}$$

car d'après la formule du binôme de Newton, $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} 4^k = (-1+4)^n = 3^n$

finalement $A^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n \left[(-1)^n I + \frac{1}{4} (3^n - (-1)^n) J \right]$ et donc $A^n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n I + \frac{1}{4} \left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right) J$

car $\left(\frac{1}{3}\right)^n \times (-1)^n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n$ et $\left(\frac{1}{3}\right)^n (3^n - (-1)^n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n \times 3^n - (-1)^n \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n$

- c. Vérifier que l'expression trouvée reste valable pour $n = 0$

0,5 point

Pour $n = 0$, on a alors d'une $A^n = A^0 = I$

et d'autre part $\left(-\frac{1}{3}\right)^n I + \frac{1}{4} \left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right) J = \left(-\frac{1}{3}\right)^0 I + \frac{1}{4} \left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^0\right) J = 1 \times I + \frac{1}{4}(1-1)J = I$

donc l'égalité est bien vérifiée.

Partie 4 : une troisième méthode de calcul des puissances de A

Soit P la matrice définie par : $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

8,5 points

1. Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}

2 points

On utilise la méthode des « inconnues invisibles »

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & | & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ \\ \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & | & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & | & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & | & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & | & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & | & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_3 \end{matrix}$$

A ce stade, nous avons déjà démontré que la matrice M est inversible car elle a été réduite en une matrice triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux sont tous non nuls.

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & | & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & | & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ L_4 \leftarrow \frac{1}{4}L_4 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - L_4 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_4 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_4 \\ \end{matrix}$$

$$\text{donc } P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

2. Déterminer la matrice D telle que $D = P^{-1}AP$

2 points

On s'attend à trouver une matrice diagonale, il suffit de calculer :

$$AP = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } P^{-1}AP = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } D = \text{diag} \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1 \right)$$

3. Montrer que $A = PDP^{-1}$

0,5 point

Par définition de D , $PDP^{-1} = PP^{-1}APP^{-1} = I_4AI_4 = A$ car $PP^{-1} = I_4$

4. Montrer que pour tout nombre entier naturel n , on a : $A^n = PD^nP^{-1}$

1,5 points

On procède par récurrence, pour $n \in \mathbb{N}$, on définit l'assertion $P(n) : A^n = PD^nP^{-1}$

Initialisation : $P(0)$ est vraie $\Leftrightarrow A^0 = PD^0P^{-1} \Leftrightarrow I_4 = PI_4P^{-1}$
ce qui est le cas car $PI_4P^{-1} = PP^{-1} = I_4$ donc $P(0)$ est vraie

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $P(n)$ vraie

donc par hypothèse $A^n = PD^nP^{-1}$

donc $A^{n+1} = A^n \times A = PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^nI_4DP^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$ car $PP^{-1} = I_4$

donc $P(n+1)$ est vraie donc par théorème de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ est vraie.

5. Retrouver pour tout nombre entier naturel n l'expression de A^n

2,5 points

D'après la question précédente $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PD^nP^{-1}$ et par propriété sur les matrices diagonales

$D^n = \text{diag}\left(\left(-\frac{1}{3}\right)^n, \left(-\frac{1}{3}\right)^n, \left(-\frac{1}{3}\right)^n, 1\right)$, reste à calculer :

$$\begin{aligned}
 PD^n &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{3}\right)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{3}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(-\frac{1}{3}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{3}\right)^n & 0 & 0 & 1 \\ -\left(-\frac{1}{3}\right)^n & \left(-\frac{1}{3}\right)^n & 0 & 1 \\ 0 & -\left(-\frac{1}{3}\right)^n & \left(-\frac{1}{3}\right)^n & 1 \\ 0 & 0 & -\left(-\frac{1}{3}\right)^n & 1 \end{pmatrix} \\
 \text{donc } PD^nP^{-1} &= \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{3}\right)^n & 0 & 0 & 1 \\ -\left(-\frac{1}{3}\right)^n & \left(-\frac{1}{3}\right)^n & 0 & 1 \\ 0 & -\left(-\frac{1}{3}\right)^n & \left(-\frac{1}{3}\right)^n & 1 \\ 0 & 0 & -\left(-\frac{1}{3}\right)^n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{2}{4} & \frac{2}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{2}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \\ \frac{1}{4} + \left(-\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)^n \\ \frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)^n \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

ce qui est conforme au résultat trouvé à la conclusion de la **partie 2**. En l'état on ne peut pas comparer au résultat de la **partie 3** qui n'est pas explicite (A^n y est exprimé en fonction de I et J)