**Plan de travail**

| **Notion** | **Exercices a minima** | **Mais aussi** |
|---|---|---|
| Equation homogène | 1 | tous |
| Conditions initiales | 2 | 8, 9 |
| Solution particulière | 2, 3, 4, 5, 7 | 6, 8, 9 |
| Applications | 7 | 8, 9 |

## Exercices de base

### Exercice 1

Résoudre les équations homogènes :

a) $y' + y = 0$ b) $y' - 3y = 0$ c) $y' = 2y$ d) $3y' = y$ e) $11y' - y = 0$

f) $y'' - 11y' + 30y = 0$ g) $y'' - \frac{1}{9}y = 0$ h) $y'' + y' + y = 0$

**Exercice 2** - conditions initiales

a) Déterminer la solution de $y' + 2y = -4, y(1) = -3$

b) Déterminer la solution de $2y' - 3y = 9, y(-1) = 1$

c) Déterminer la solution de $y'' + 2y' - 3y = 9, y(0) = 0, y'(0) = 2$

**Exercice 3** - Premier ordre, à coefficients constants

Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $2y' - y = \pi$

b) $7y' + 2y = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1$

c) $y' + 2y = x^2 - 2x + 3$

**Exercice 4** - Deuxième ordre, à coefficients constants

Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $y'' - 4y = 12$

b) $y'' + 7y' + 12y = x$

**Exercice 5** - extrait du sujet zéro Ecricome 2022

1. Donner les fonctions $f$ définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation différentielle
$$y' = 2y$$
2. Soit $c \in \mathbb{R}$, montrer que la fonction $t \mapsto cte^{2t}$ est une solution de l'équation différentielle
$$\mathscr{E} : y'(t) = 2y(t) + ce^{2t}$$
3. Déterminer toutes les solutions de $\mathscr{E}$

### Exercice 6

On s'intéresse à l'équation différentielle suivante :

$$E : y' + y = \frac{1}{1 + e^x} \quad \text{sur } \mathbb{R}$$

1. Montrer que $x \mapsto \ln(1 + e^x)e^{-x}$ est une solution particulière de $E$
2. Résoudre $E$

# Exercices d'application

**Exercice 7** - l'équation logistique

On appelle équation logistique, l'équation différentielle suivante :

$$N'(t) = aN(t)(1 - bN(t)) \quad \text{où} \quad (a, b) \in \mathbb{R}_+$$

Elle modélise l'évolution d'une population évoluant en milieu fermé.

1. Soit $N$ une solution de cette équation qui ne s'annule pas.
   On pose $P = \dfrac{1}{N}$
   Montrer que $P$ vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants.
2. Résoudre l'équation trouvée à la question **1.**
3. En déduire l'expression de $N$ en fonction de $t$
4. Déterminer la limite de $N$ lorsque $t$ tend vers $+\infty$
   Interpréter le résultat.

**Exercice 8** - Taux d'alcoolémie

Le taux d'alcoolémie $f(t)$ (en $\text{g}\cdot\text{L}^{-1}$) d'une personne ayant absorbé, à jeun, une certaine quantité d'alcool vérifie l'équation différentielle $y'(t) + y(t) = ae^{-t}$, où $t \geqslant 0$ est le temps écoulé après l'ingestion (exprimé en heures) et $a$ est une constante qui dépend de la quantité d'alcool ingérée et de la personne.

1. Montrer que $t \mapsto ate^{-t}$ est une solution particulière de l'équation différentielle.
2. Exprimer $f$ en fonction de $t$ et de $a$
3. On fixe $a = 5$
   Etudier les variations de $f$ et tracer sa courbe. Déterminer le taux d'alcoolémie maximal et le temps au bout duquel il est atteint.
4. Donner une valeur du délai $T$ (à l'heure près par excès) au bout duquel le taux d'alcoolémie de cette personne est inférieur à $0,5\,\text{g}\cdot\text{L}^{-1}$ (on pourra utiliser une calculatrice).

**Exercice 9**

*Exercice extrait d'un sujet de bac STI2D 2019 calculatrice autorisée*

Le clinker est un constituant du ciment qui résulte de la cuisson d'un mélange composé de calcaire et d'argile. La fabrication du clinker nécessite des fours à très haute température qui libèrent dans l'air une grande quantité de dioxyde de carbone ($CO_2$).
Dans une cimenterie, la fabrication du clinker s'effectue de 7h30 à 20h, dans une pièce de volume 900 000 $\text{dm}^3$.
A 20h, après une journée de travail, le taux volumique de $CO_2$ dans la pièce est de $0,6\,\%$

1. Justifier que le volume de $CO_2$ présent dans cette pièce à 20h est de 5 400 $\text{dm}^3$
2. Pour diminuer ce taux de $CO_2$ durant la nuit, l'entreprise a installé dans la pièce une colonne de ventilation. Le volume de $CO_2$, exprimé en $\text{dm}^3$, est alors modélisé par une fonction du temps $t$ écoulé après 20h, exprimé en minutes. $t$ varie ainsi dans l'intervalle $[0; 690]$ puisqu'il y a 690 minutes entre 20h et 7h30.
   On admet que cette fonction $V$, définie et dérivable sur l'intervalle $[0; 690]$ est une solution, sur cet intervalle, de l'équation différentielle
   $$(E) : y' + 0,01y = 4,5$$
   a. Déterminer la solution générale de l'équation différentielle $(E)$
   b. Vérifier que pour tout réel $t$ de l'intervalle $[0; 690]$, $V(t) = 4\,950\text{e}^{-0,01t} + 450$
3. Quel sera, au $\text{dm}^3$ près, le volume de $CO_2$ dans cette pièce à 21h ?
4. Les responsables de la cimenterie affirment que chaque matin à 7h30 le taux de $CO_2$ dans cette pièce est inférieur à $0,06\,\%$
   Cette affirmation est-elle vraie ? Justifier la réponse.
5. Déterminer l'heure à partir de laquelle le volume de $CO_2$ dans la pièce deviendra inférieur à 900 $\text{dm}^3$