Corrigés

Etude de dérivabilité

Exercice 1

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$

1. Justifier que f est continue en 0

f est un quotient de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et son dénominateur ne s'annule pas, donc f est continue sur $\mathbb{R}$ et a fortiori en 0

2. f est-elle dérivable en 0 ?

Il faut passer par la définition dans ce cas :

pour $x \neq 0$, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{\frac{x}{1+|x|}}{x} = \dfrac{1}{1+|x|}$ (car $f(0) = 0$

or $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{1+|x|} = \dfrac{1}{1+0} = 1$ par opérations,

donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1$

donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$

3. f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

La fonction valeur absolue est $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$

donc f est $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ par opérations de fonctions $\mathscr{C}^1$

comme f est dérivable en 0 d'après **2.**, il reste à étudier la continuité de f' en 0

or $\forall x > 0, f(x) = \dfrac{x}{1+x}$

donc $\forall x > 0, f'(x) = \dfrac{1\times(1+x) - x\times 1}{(1+x)^2} = \dfrac{1}{(1+x)^2}$

et $\forall x < 0, f(x) = \dfrac{x}{1-x}$

donc $\forall x < 0, f'(x) = \dfrac{1\times(1-x) - x\times(-1)}{(1-x)^2} = \dfrac{1}{(1-x)^2}$

donc f' est continue en 0, donc f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 2

On définit l'application f de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \exp\big(x\ln(x)\big) & \text{si} \quad x > 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

1. Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}_+$

Par produit et composition de fonctions continues f est continue sur $]0, +\infty[$

de plus par croissance comparée $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$

et par ailleurs $\lim\limits_{X\to 0} e^X = 1$

donc par composition $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0)$

donc f est également continue en 0, donc f est continue sur $\mathbb{R}$

2. f est-elle dérivable en 0 ?

Comme à l'**exercice 1**, il faut passer par la définition dans ce cas :

pour $x > 0$, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{\exp\big(x\ln(x)\big)-1}{x}$

$= \dfrac{\exp\big(x\ln(x)\big)-1}{x\ln(x)} \times \ln(x)$

or à nouveau $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$

et par ailleurs $\lim\limits_{X\to 0} \dfrac{e^X - 1}{X} = 1$

donc par composition $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\exp\big(x\ln(x)\big)-1}{x\ln(x)} = 1$

et comme $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$, par produit $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\infty$

donc f n'est pas dérivable en 0

3. Déterminer la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0

Comme la limite du taux d'accroissement vaut $-\infty$ en 0, il s'agit ici d'un cas particulier de tangente verticale, dont l'équation est $x = 0$

4. Dresser le tableau de variations de f. Tracer $\mathscr{C}_f$ et la tangente au point d'abscisse 0

Par produit et composition de fonctions dérivables f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\forall x \in]0, +\infty[, f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$

avec $u(x) = x\ln(x)$ et donc $u'(x) = \ln(x) + x \times \dfrac{1}{x} = \ln(x) + 1$ par dérivation d'un produit

donc $f'(x) = (\ln(x) + 1)\exp\left(x\ln(x)\right)$

donc $f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \ln(x) + 1 \geqslant 0$ (car l'exponentielle est toujours positive), $\Leftrightarrow \ln(x) \geqslant -1 \Leftrightarrow x \geqslant e^{-1}$

de même $f'(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant e^{-1}$, d'où le tableau de variations :

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$f'(x)$	‖	-	0	+	
f	1	$\searrow$	$f\left(e^{-1}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

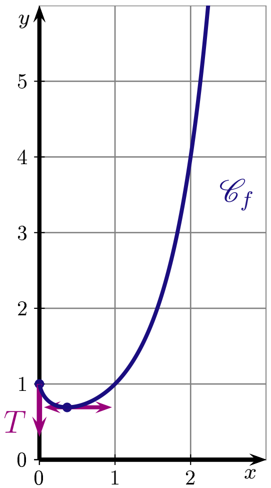
on a utilisé $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(x) = +\infty$ par produit puis par composition avec $\lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$

Pour le tracé, on a besoin de la valeur de $f\left(e^{-1}\right)$

or $f\left(e^{-1}\right) = \exp\left(e^{-1}\ln\left(e^{-1}\right)\right) = \exp\left(-\dfrac{1}{e}\right)$

ce qui n'est pas aisé à calculer à la main, on utilisera $f\left(e^{-1}\right) \simeq 0,7$

on peut aussi remarquer que pour $x \geqslant e$, $ln(x) \geqslant 1$ et donc $f(x) \geqslant e^x$, donc f « rejoint une forme exponentielle ».



Exercice 3

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad f(x) = \sqrt{x}\ln(1 + \sqrt{x})$$

Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, +\infty[$

Attention, du fait de la fonction racine carrée qui n'est pas dérivable en 0, on peut seulement dire que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ en utilisant les théorèmes généraux (opérations et composition : f est un produit de fonctions : la fonction racine carrée, et la fonction $x \mapsto \ln(1 + \sqrt{x})$, cette dernière étant une composition).

Pour montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, +\infty[$, il reste donc à montrer que f est dérivable en 0, et que f' est continue en 0 :

$\triangleright$ Pour $x > 0$, $\dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \dfrac{\ln(1 + \sqrt{x})}{\sqrt{x}}$

or $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\ln(1 + t)}{t} = 1$ (nous l'avons vu en exemple du cours, il s'agit de $\ln'(1)$),

par composition avec $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x} = 0$, on a : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1 + \sqrt{x})}{\sqrt{x}} = 1$

donc f est dérivable en 0, et $f'(0) = 1$.

$\triangleright$ Pour $x > 0$, on a : $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \times \ln(1 + \sqrt{x}) + \sqrt{x} \times \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1 + \sqrt{x}}$

soit $f'(x) = \dfrac{\ln(1 + \sqrt{x})}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{2(1 + \sqrt{x})}$.

Il reste à savoir si f' est continue en 0, pour cela on étudie la limite de f' en 0

comme vu au dessus, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1 + \sqrt{x})}{\sqrt{x}} = 1$

de plus $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{2(1 + \sqrt{x})} = \dfrac{1}{2}$, donc $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = \dfrac{1}{2} \times 1 + \dfrac{1}{2} = 1$

ainsi, $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = f'(0)$ et donc f' est continue en 0.

Finalement, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, +\infty[$

Exercice 4

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \ln(x) & \text{si} \quad x \geqslant 1 \\ e^x - e & \text{si} \quad x < 1 \end{cases}$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$

   f est continue sur $]-\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$ car définie par des fonctions continues sur ces intervalles, la seule discontinuité possible est en 1
   mais $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} e^x - e = e - e = 0$ par continuité de la fonction exponentielle
   et $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = ln(1) = 0$ par continuité de ln
   donc $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = f(1)$
   donc f est continue en 1 et donc sur $\mathbb{R}$

2. f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

   De même, f est dérivable sur $]-\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$ car définie par des fonctions dérivables sur ces intervalles, étudions alors la dérivabilité en 1 :
   mais $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{e^x - e}{x - 1} = g'(1) = e$ avec $g(x) = e^x - e$ puisqu'on reconnait le taux d'accroissement de cette fonction g qui est par ailleurs dérivable et dont la dérivée est $g'(x) = e^x$
   et $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{\ln(x)}{x - 1} = \ln'(1) = 1$ d'après la nouvelle limite du cours (où on reconnait le taux d'accroissement de la fonction ln en 1) donc $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} \neq \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$
   donc $\dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ n'admet pas de limite quand x tend vers 1, donc f n'est pas dérivable en 1

   Nota bene : en résumé, on a utilisé que f était définie par deux fonctions dérivables à gauche et à droite de 1, mais leurs dérivées respectives ne se rejoignent pas en une valeur commune donc f n'est pas dérivable en 1 (graphiquement, on pourrait définir une tangente à gauche et une tangente à droite, qui ici sont différentes).

Calcul de dérivée

Exercice 5

Soit f définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2\ln(x) & \text{si} \quad x > 0 \\ 1 \quad \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$

1. Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}_+$

   f est continue sur $]0, +\infty[$ (opérations de fonctions continues sur ces intervalles), la seule discontinuité possible est en 0
   mais $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \ln(x) = 0$ par croissance comparée
   donc par addition, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f(x) = 1 = f(0)$
   donc f est continue en 0 et donc sur $\mathbb{R}$

2. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et calculer $f'(x)$ pour $x > 0$

   De même, f est dérivable sur $]0, +\infty[$ (opérations de fonctions dérivables sur ces intervalles)
   et $\forall x > 0, f'(x) = -(u'(x)v(x) + u(x)v'(x))$ avec $u(x) = x^2$ et $v(x) = \ln(x)$ et donc $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = \dfrac{1}{x}$
   donc $f'(x) = -\left(2x\ln(x) + x^2 \times \dfrac{1}{x}\right) = -2x\ln(x) - x = -x(1 + 2\ln(x))$

3. Montrer que f est dérivable en 0, et calculer $f'(0)$

   Pour $x > 0$, $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{1 - x^2\ln(x) - 1}{x} = \dfrac{-x^2\ln(x)}{x} = -x\ln(x)$
   or $\lim\limits_{x \to 0} x\ln(x) = 0$ par croissance comparée
   donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$
   donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$

4. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$

De même, par opérations de fonctions $\mathscr{C}^1$, f est $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$,
et f est dérivable en 0 et $f'(0)=0$
reste à vérifier la continuité de f' en 0
d'après **2.**, pour $x>0, f'(x)=-x-2x\ln(x)$
or à nouveau $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x)=0$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f'(x)=0=f'(0)$
donc f' est continue en 0, donc f' est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$

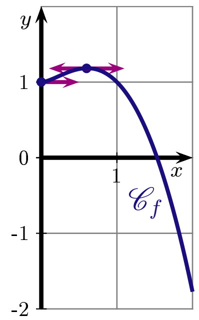
5. Dresser le tableau de variation de f

$f'(0)=0$ et pour $x>0, f'(x)\geqslant 0 \Leftrightarrow -x(1+2\ln(x))\geqslant 0 \Leftrightarrow 1+2\ln(x)\leqslant 0$ (car $x>0$) $\Leftrightarrow 2\ln(x)\leqslant -1 \Leftrightarrow \ln(x)\leqslant -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x\leqslant e^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ car exp est croissante sur $\mathbb{R}$
de même $f'(x)\leqslant 0 \Leftrightarrow x\geqslant e^{-\frac{1}{2}}$
on peut donc établir le tableau de variations de f sachant que $f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)=1-\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)^2\ln\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)=1-e^{-1}\left(-\dfrac{1}{2}\right)\ln(e)=1+\dfrac{1}{2e}$
et que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ par opérations
car $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-x^2\ln(x)=-\infty$

x	0		$e^{-1/2}$		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	0	-	
f	1	$\nearrow$	$1+\dfrac{1}{2e}$	$\searrow$	$-\infty$

6. Tracer l'allure de $\mathscr{C}_f$ au voisinage du point d'abscisse 0

La courbe commence croissante mais avec une tangente horizontale en 0, puis atteint un maximum pour $x=e^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{e^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ avant de décroitre
il n'est pas aisé de calculer cette valeur à la main, on prend donc $e^{-\frac{1}{2}}\simeq 0,6$ et le maximum vaut $1+\dfrac{1}{2e}\simeq 1,2$



Exercice 6

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes, déterminer un domaine Δ sur lesquelles elles sont dérivables en utilisant les théorèmes généraux, et calculer leur dérivée.

1. $f_1(x)=\sqrt{1-4x^2}$

$f_1(x)=\sqrt{u(x)}$ avec $u(x)=1-4x^2$, donc f_1 est définie dès lors que $u(x)\geqslant 0 \Leftrightarrow 1-4x^2\geqslant 0 \Leftrightarrow 4x^2\leqslant 1 \Leftrightarrow x^2\leqslant \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow |x|\leqslant \dfrac{1}{2}$
donc f_1 est définie sur $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$
f_1 est dérivable là où elle définie et de plus là où $u(x)$ ne s'annule pas (composition de fonctions dérivables : une fonction polynomiale et la fonction racine carrée qui est dérivable sur $]0,+\infty[$), i.e. si $1-4x^2\neq 0 \Leftrightarrow 4x^2\neq 1 \Leftrightarrow x^2=\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$ ou $x=\dfrac{1}{2}$
donc f_1 est dérivable sur $\left]-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right[$ et
$\forall x\in\left]-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right[, f_1'(x)=\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}=\dfrac{-8x}{2\sqrt{1-4x^2}}=\dfrac{-4x}{\sqrt{1-4x^2}}$

2. $f_2(x)=x^{\ln(x)}$

alors $f_2(x)=\exp[\ln(x)\ln(x)]=\exp[(\ln(x))^2]$
donc f_2 est définie et dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que composition de fonctions dérivables.
de plus $f_2(x)=\exp[u(x)]$ avec $u(x)=(\ln(x))^2$

on peut écrire $u(x) = v(x)^2$ avec $v(x) = \ln(x)$
et donc $u'(x) = 2v'(x)v(x) = 2\frac{1}{x}\ln(x) = \frac{2\ln(x)}{x}$
donc $\forall x > 0, f_2'(x) = u'(x)\exp(u(x)) = \frac{2\ln(x)}{x}\exp[(\ln(x))^2]$
que l'on peut écrire $f_2'(x) = \frac{2\ln(x)}{x}x^{\ln(x)} = 2\ln(x)x^{\ln(x)-1}$

3. $f_3(x) = \frac{1}{x^4}$

$f_3(x) = x^{-4}$ donc f_3 est définie et dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ car c'est une fonction usuelle dérivable (fonction puissance), de plus $\forall x \neq 0, f_3'(x) = -4x^{-5} = -\frac{4}{x^5}$

4. $f(x) = x^2 e^{-2x}$

Aucune contrainte de définition et de dérivabilité ici, donc f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$
pour dériver, on utilise la formule du produit avec $u(x) = x^2$ (et donc $u'(x) = 2x$) et $v(x) = e^{-2x}$ (et donc $v'(x) = -2e^{-2x}$)
donc $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2xe^{-2x} + x^2 \times (-2e^{-2x}) = 2xe^{-2x}(1-x)$

5. $g(x) = \frac{x\sqrt{x}}{e^x - 1}$

La racine carrée limite la définition de g à $\mathbb{R}_+$ et le dénominateur limite à $]0, +\infty[$ (car $e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$), ce qui permet d'éviter le problème de non-dérivabilité de la racine carrée en 0 donc, en tant qu'opération de fonctions dérivables,
g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et en notant $u(x) = x^{\frac{3}{2}}$ alors $u'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$ et $v(x) = e^x - 1$ (alors $v'(x) = e^x$)

on trouve, $\forall x > 0, g'(x) = \frac{\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}(e^x - 1) - x^{\frac{3}{2}}e^x}{(e^x - 1)^2}$
$$= \frac{\sqrt{x}\left[e^x\left(\frac{3}{2} - x\right) - \frac{3}{2}\right]}{(e^x - 1)^2}$$

6. $h(x) = (x^2 + 1)^x$

h est définie par une « puissance quelconque », que l'on peut écrire par définition, $h(x) = \exp\left(x\ln(x^2 + 1)\right)$
donc h est définie sur $\mathbb{R}$, car $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 > 0$ et en écrivant $u(x) = x\ln(x^2 + 1)$, on obtient,
$\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = u'(x)e^{u(x)}$
or $u(x)$ s'écrit comme un produit $v(x)w(x)$ avec $v(x) = x$ (donc $v'(x) = 1$) et $w(x) = \ln(x^2 + 1)$ (donc $w'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$)

donc $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = \left(\ln(x^2 + 1) + x \times \frac{2x}{x^2 + 1}\right)\exp\left(x\ln(x^2 + 1)\right)$
$$= \left(\ln(x^2 + 1) + \frac{2x^2}{x^2 + 1}\right)(x^2 + 1)^x$$

7. $k(x) = \ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)$

Avec $u(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ (et donc $u'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$), on trouve que k est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ car $\forall x \in \mathbb{R}, u(x) > 0$ et k est une composition de fonctions dérivables
de plus $\forall x > 0, k'(x) = \frac{u'(x)}{u'(x)} = \frac{\frac{e^x + e^{-x}}{2}}{\frac{e^x - e^{-x}}{2}} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

Dérivées successives

Exercice 7

Soit g la fonction définie sur $\mathscr{D}$ par : $\forall x \in \mathscr{D}, \quad g(x) = -\ln(1 - x)$

1. Déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}$ de g

Le nombre $g(x)$ est défini si et seulement si $1 - x > 0 \Leftrightarrow x < 1$
donc $\mathscr{D} =]-\infty, 1[$

2. Justifier que g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathscr{D}$

g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-\infty, 1[$ par composition de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$, puisque ln est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$

3. Par récurrence, établir une formule pour $g^{(n)}(x)$, avec $x \in \mathscr{D}$ et $n \in \mathbb{N}^*$

Pour $x<1$: $g'(x)=(1-x)^{-1}$ $\quad g''(x)=(1-x)^{-2}$ $\quad g^{(3)}(x)=2(1-x)^{-3}$ $\quad g^{(4)}(x)=6(1-x)^{-4}$
En extrapolant, on trouve la formule suivante, qui devient notre assertion $P(n)$

pour $n\geqslant 1, P(n) : \forall x\in]-\infty,1[, g^{(n)}(x)=\dfrac{(n-1)!}{(1-x)^n}$

Initialisation : $P(1)$ est vraie comme nous l'avons vu juste au-dessus.

Hérédité : soit $n\geqslant 1$, supposons $P(n)$ vraie.

alors par hypothèse, $\forall x\in]-\infty,1[, g^{(n)}(x)=\dfrac{(n-1)!}{(1-x)^n}$

donc $g^{(n)}$ est dérivable sur $]-\infty,1[$
et pour $x\in]-\infty,1[$, on peut aussi écrire $g^{(n)}(x)=(n-1)!(1-x)^{-n}$
alors $g^{(n+1)}(x)=(n-1)!(-n)\times(-1)\times(1-x)^{-n-1}$
i.e. $g^{(n+1)}(x)=n\times(n-1)!(1-x)^{-(n+1)}=n!\dfrac{1}{(1-x)^{n+1}}$
donc $P(n+1)$ est vérifiée, d'où l'hérédité et donc par théorème de récurrence, $\forall n\in\mathbb{N}, P(n)$ est vraie.

Etude de fonctions

Exercice 8

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x)=2e^{-x}\sqrt{x}$

1. Vérifier que f est continue sur $\mathbb{R}_+$

f est un produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$

2. Vérifier que $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\dfrac{2}{e}}$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=2e^{-1/2}\times\sqrt{\frac{1}{2}}=2\times\frac{1}{\sqrt{2}}\times\left(e^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{e}}=\sqrt{\frac{2}{e}}$$

3. f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}_+$?

D'après les théorèmes généraux, on peut seulement dire que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, par produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ mais pour savoir si f est ou n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}_+$, il faut examiner la dérivabilité en 0 « à la main ».
$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{-x}\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{-x}}{\sqrt{x}}=+\infty$ par opération (quotient), car $\displaystyle\lim_{x\to 0}e^{-x}=1$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0}\sqrt{x}=0^+$
donc f n'est pas dérivable en 0, et de fait, elle n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}_+$

4. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)$

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x}}{e^x}=0$ par croissances comparées.

5. Dresser le tableau de variations complet de f

Pour $x>0$, on a : $f'(x)=-2e^{-x}\sqrt{x}+2e^{-x}\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x}}(1-2x)$

donc $f'(x)$ est du signe de $1-2x$, d'où le tableau de variations :

x	0		$1/2$		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	-	
f	0	$\nearrow$	$\sqrt{\dfrac{2}{e}}$	$\searrow$	0

6. Etudier la convexité de f, et montrer que $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion.

pour $x>0$, $f'(x)=-2e^{-x}\sqrt{x}+e^{-x}\times x^{-1/2}$
donc $f''(x)=2e^{-x}\sqrt{x}-2e^{-x}\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x}}+e^{-x}\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)\times x^{-3/2}$

que l'on peut écrire $f''(x)=\dfrac{e^{-x}}{2x\sqrt{x}}(4x^2-4x-1)$

L'équation du second degré $4x^2-4x-1=0$ a deux solutions $r_1=\dfrac{4+2\sqrt{5}}{8}=\dfrac{2+\sqrt{5}}{4}$ et $r_2=\dfrac{2-\sqrt{5}}{4}$
Pour $x>0$, $f''(x)$ est du signe du trinôme $4x^2-4x-1$. Mais $r_2<0$, et $r_1>0$, donc on a le tableau de signe suivant :

x	0		r_1		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$-$	0	$+$	

On en déduit que $\mathscr{C}_f$ a un seul point d'inflexion : le point d'abscisse r_1, que f et concave sur $]0, r_1]$ et convexe sur $[r_1, +\infty[$.

7. Soit g définie sur $I = \left]0, \dfrac{1}{2}\right[$ par : $\forall x \in I, \quad g(x) = f(x)$

Montrer que g définit une bijection entre I et un intervalle J à déterminer.

On applique le théorème de la bijection à g qui est continue est strictement croissante sur I et donc bijective de I sur $J = \left]g(0), g\left(\dfrac{1}{2}\right)\right[$, on trouve donc $J = \left]0, \sqrt{\dfrac{2}{e}}\right[$

8. Justifier que g^{-1} est dérivable sur J

g est donc une bijection continue, strictement décroissante de I dans J. Elle est dérivable sur cet intervalle, et d'après la question **5**, on sait que $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$. Donc d'après la propriété de dérivabilité de la bijection réciproque (voir cours), g^{-1} est dérivable sur J

Exercice 9

Soit f la fonction définie sur $[0, 1[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\ln(x)} & \text{si} \quad x \in]0, 1[\\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $[0, 1[$

f est continue sur $]0, 1[$ car définie par l'inverse d'une fonction continue

de plus $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$ donc par inversion de limite $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\ln(x)} = 0$

et donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$ donc f est continue en 0 et de fait sur $[0, 1[$

2. f est-elle dérivable en 0 ?

On passe par la définition ici :

$\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{\frac{1}{\ln(x)}}{x} = \dfrac{1}{x \ln(x)}$

or $\lim\limits_{x \to 0} x \ln(x) = 0$ par croissance comparée (et même 0^-)

donc par inversion $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\infty$

donc f n'est pas dérivable en 0

3. Déterminer la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0

Comme la limite du taux d'accroissement vaut $-\infty$ en 0, il s'agit ici d'un cas particulier de tangente verticale, dont l'équation est $x = 0$

4. Etudier les variations de f

f est dérivable sur $]0, 1[$ et

$\forall x \in]0, 1[, f'(x) = \dfrac{-\ln'(x)}{(\ln(x))^2} = \dfrac{-\frac{1}{x}}{(\ln(x))^2} = -\dfrac{1}{x(\ln(x))^2}$

or $\forall x \in]0, 1[, x(\ln(x))^2 > 0$ (produit de termes strictement positifs)

donc $\forall x \in]0, 1[, f'(x) < 0$, donc f est strictement décroissante sur $]0, 1[$ et donc sur $[0, 1[$ par propriété.

5. Etudier la convexité de f, et les points d'inflexion de $\mathscr{C}_f$, et donner les tangentes à $\mathscr{C}_f$ aux éventuels points d'inflexion.

D'après la question précédente,

$\forall x \in]0, 1[, f'(x) = -\dfrac{1}{v(x)}$ avec $v(x) = x(\ln(x))^2$

donc f' est dérivable sur $]0, 1[$ et

$\forall x \in]0, 1[, f''(x) = -\left(-\dfrac{v'(x)}{v(x)^2}\right) = \dfrac{v'(x)}{v(x)^2}$

donc $f''(x)$ est du signe de $v'(x)$

or $v(x) = a(x)b(x)$ avec $a(x) = x$ (et donc $a'(x) = 1$) et

$b(x) = (\ln(x))^2$ donc $b'(x) = 2\ln'(x)\ln(x) = 2\dfrac{\ln(x)}{x}$

donc $v'(x) = (\ln(x))^2 + x \times 2\dfrac{\ln(x)}{x} = (\ln(x))^2 + 2\ln(x)$
$= \ln(x)(\ln(x)+2)$

or $\forall x \in]0,1[, \ln(x) < 0$

donc $v'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(x) + 2 < 0 \Leftrightarrow \ln(x) < -2 \Leftrightarrow x < e^{-2} = \dfrac{1}{e^2}$

de même $v'(x) < 0 \Leftrightarrow x > \dfrac{1}{e^2}$ et $v(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{e^2}$

donc par caractérisation des fonctions convexes et concaves, f est convexe sur $]0, e^{-2}[$, concave sur $]e^{-2}, 1[$ et admet un point d'inflexion en e^{-2} car f'' s'annule en changeant de signe en ce point

de plus la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse e^{-2} a pour équation $y = f'\left(e^{-2}\right)\left(x - e^{-2}\right) + f\left(e^{-2}\right)$

or $f\left(e^{-2}\right) = \dfrac{1}{\ln\left(e^{-2}\right)} = -\dfrac{1}{2}$ et $f'\left(e^{-2}\right) = -\dfrac{1}{e^{-2}\left(\ln\left(e^{-2}\right)\right)^2} = -\dfrac{e^2}{(-2)^2} = -\dfrac{e^2}{4}$

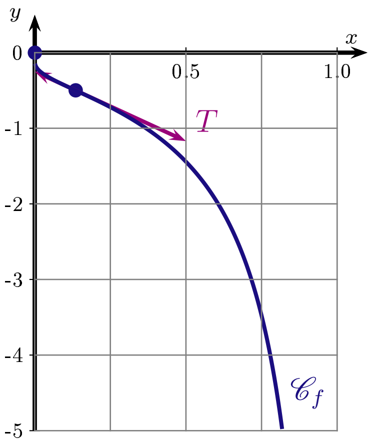
donc l'équation est $y = -\dfrac{e^2}{4}\left(x - e^{-2}\right) - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{e^2}{4}x + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2}$

soit $y = -\dfrac{e^2}{4}x + \dfrac{1}{4}$

6. Représenter $\mathscr{C}_f$

Sans aide il n'est pas facile de déterminer e^2, à défaut, on peut se contenter de $e^2 \simeq 8$ et donc prendre l'équation $y = -2x - \dfrac{1}{4}$ pour la tangente trouvée précédemment

de plus on utilise la tangente verticale en 0 et $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -\infty$ car $\lim\limits_{x \to 1} \ln(x) = 0^-$ (puis par inversion)



Exercice 10

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = xe^x$

1. Etudier les variations de f et ses limites.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x$

donc $f'(x)$ est du signe de $(1+x)$, c'est-à-dire négative sur $]-\infty, -1]$ (strictement si on exclut -1) et positive sur $[-1, +\infty[$,

donc f est strictement décroissante sur $]-\infty, -1]$ et strictement croissante sur $[-1, +\infty[$

enfin par croissances comparées, $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$, et d'autre part $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ donc par produit $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^x = +\infty$

2. Déterminer la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0

Cette tangente a pour équation $y = f'(0)(x-0) + f(0)$

or $f'(0) = (1+0)e^0 = 1$ et $f(0) = 0$ donc l'équation de la tangente est $y = x$

3. Montrer que f induit une bijection entre $[-1, +\infty[$ et $[-e^{-1}, +\infty[$. On notera h cette bijection.

f est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $[-1, +\infty[$, donc, d'après le théorème de la bijection, f induit (ou réalise) une bijection de $[-1, +\infty[$ sur $[f(-1), \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)[$, i.e. sur $[-e^{-1}, +\infty[$ car $f(-1) = -1 \times e^{-1}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ comme nous l'avons vu plus haut.

4. On note $W = h^{-1}$. Montrer que W est dérivable sur $]-e^{-1}, +\infty[$ et que pour $x > -e^{-1}$ et $x \neq 0$, on a : $W'(x) = \dfrac{W(x)}{x(1+W(x))}$

Par propriété, la réciproque d'une fonction dérivable est dérivable là où elle ne s'annule pas, or g est dérivable (c'est le cas de f donc c'est le cas de g aussi) mais $g'(-1) = f'(-1) = 0$, donc W est dérivable sur $]h(-1), +\infty[$, i.e. sur $]-e^{-1}, +\infty[$

de plus, nous savons que $\forall x \in]-e^{-1}, +\infty[, W'(x) = \dfrac{1}{h'(W(x))}$

donc $W'(x) = \dfrac{1}{(1+W(x))e^{W(x)}}$
or $W(x)e^{W(x)} = f(W(x)) = h(W(x)) = h \circ h^{-1}(x) = x$
soit $W(x)e^{W(x)} = x$
dont on déduit $e^{W(x)} = \dfrac{x}{W(x)}$ dès lors que $W(x) \neq 0$, ce qui est le cas pour $x \neq 0$ (en effet $W(x) \neq 0 \Rightarrow h(W(x)) = h(0)$ i.e. $x = 0$)
finalement $\forall x \in]-e^{-1}, +\infty[$ et $x \neq 0$,

$$W'(x) = \frac{1}{\frac{x}{W(x)} + x} = \frac{1}{x(\frac{1}{W(x)} + 1)} = \frac{W(x)}{x(1+W(x))}$$

Exercice 11

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et déterminer f'

f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (et même $\mathscr{C}^{+\infty}$ en tant que quotient de fonctions $\mathscr{C}^1$ (ou $\mathscr{C}^{+\infty}$) sur $\mathbb{R}$
de plus avec $u(x) = e^x - 1$ et $v(x) = e^x + 1$
on a alors $u'(x) = e^x$ et $v(x) = e^x$

$$\text{et donc } \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{e^x(e^x+1) - (e^x-1)e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$$

2. Dresser le tableau de variations complet de f

Avec l'expression trouvée précédemment, on trouve que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, il faut alors calculer les limites pour compléter le tableau :
d'une part $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ donc par opérations $\lim\limits_{x \to -\infty} = \dfrac{0-1}{0+1} = -1$
et en $+\infty$, on factorise pour lever l'indétermination :
$f(x) = \dfrac{e^x(1-e^{-x})}{e^x(1+e^{-x})} = \dfrac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}$ et donc par opérations $\lim\limits_{x \to -\infty} = 1$

on peut donc dresser le tableau de variations de f

x	$-\infty$	$+\infty$
f	-1 ↗	1

3. Etudier la convexité de f, et montrer que $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion.

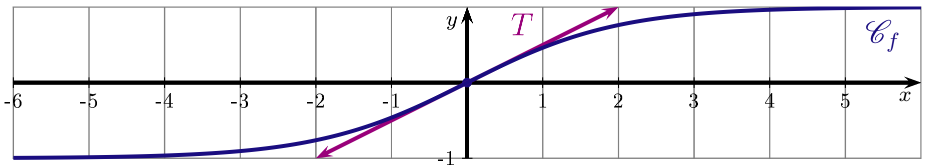
Comme nous l'avons vu plus haut, f' est dérivable et en notant, pour $x \in \mathbb{R}, a(x) = 2e^x$ et $b(x) = (e^x+1)^2$
on a $a'(x) = 2e^x$ et $b'(x) = 2e^x(e^x+1)$ et de fait

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) &= \frac{a(x)b(x) - a(x)b'(x)}{b(x)^2} \quad (\text{car } a'(x) = a(x)) \\ &= \frac{2e^x((e^x+1)^2 - 2e^x[2e^x(e^x+1)]}{(e^x+1)^4} \\ &= \frac{2e^x(e^x+1)\,(e^x+1-2e^x)}{(e^x+1)^4} = \frac{2e^x\,(1-e^x)}{(e^x+1)^3}\end{aligned}$$

donc $f''(x)$ est du signe de $1 - e^x$, de fait
$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x < 0, f''(x) < 0 \Leftrightarrow x > 0$ et $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
donc par caractérisation des fonctions convexes et concaves, f est convexe sur $\mathbb{R}_-$, concave sur $\mathbb{R}_+$ et admet un point d'inflexion au point d'abscisse 0 (puisque sa dérivée seconde s'annule en changeant de signe).

4. Tracer $\mathscr{C}_f$ ainsi que la tangente au point d'inflexion.

Cette tangente a pour équation $y = f'(0)(x-0) + f(0)$ i.e. $y = \dfrac{x}{2}$
car $f(0) = 0$ et $f'(0) = \dfrac{2e^0}{(e^0+1)^2} = \dfrac{1}{2}$
On se contente alors du point $(0,0)$, de la tangente et des limites pour tracer f



Exercice 12

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = -\dfrac{1}{x}$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

1. Montrer que la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.

(S_n) est la somme partielle d'une série à termes positifs, il s'agit donc d'une suite croissante (on peut s'en convaincre en écrivant $S_{n+1} - S_n = \cdots = \dfrac{1}{(n+1)^2}$)

2. Soit k un entier tel que $k \geqslant 2$

a. Montrer que pour tout $x \in [k-1, k]$,

$$\frac{1}{k^2} \leqslant f'(x) \leqslant \frac{1}{(k-1)^2}$$

f est $\mathscr{C}^{+\infty}$ car c'est l'opposée d'une fonction usuelle ($x \mapsto x^{-1}$),de plus, $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = -\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{1}{x^2}$

alors pour $k \in \mathbb{N}, k \geqslant 2, x \in [k-1, k] \Rightarrow (k-1)^2 \leqslant x^2 \leqslant k^2$ car la fonction carré est croissante sur $\mathbb{R}^+$

et donc $\dfrac{1}{k^2} \leqslant f'(x) \leqslant \dfrac{1}{(k-1)^2}$ car la fonction inverse est décroissante sur $]0, +\infty[$

b. En déduire un encadrement de $f(k) - f(k-1)$

Etant donné que f' est bornée sur $[k, k-1]$, d'après l'inégalité des accroissements finis que l'on applique avec $a = k-1$ et $b = k$ (qui sont bien des points de l'intervalle $[k-1, k]$, on en déduit que $\dfrac{1}{k^2}[k-(k-1)] \leqslant f(k) - f(k-1) \leqslant \dfrac{1}{(k-1)^2}[k-(k-1)]$ i.e. $\dfrac{1}{k^2} \leqslant f(k) - f(k-1) \leqslant \dfrac{1}{(k-1)^2}$

3. En déduire que pour n entier tel que $n \geqslant 2$:

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant f(n) - f(1)$$

On a montré à la question précédente que

$\forall k \in \mathbb{N}, k \geqslant 2, \dfrac{1}{k^2} \leqslant f(k) - f(k-1)$

donc pour $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2, \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \sum_{k=2}^{n}(f(k) - f(k-1))$

or $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}(f(k) - f(k-1))$ est une somme télescopique,

donc $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}(f(k) - f(k-1)) = f(n) - f(1)$

et de fait $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant f(n) - f(1)$

4. En déduire que la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ converge.

Par définition de f, $f(n) - f(1) = -\dfrac{1}{n} - \left(-\dfrac{1}{1}\right) = 1 - \dfrac{1}{n}$

donc $f(n) - f(1) \leqslant 1$ et de fait $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2, \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 1$

or $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2}$ par relation de Chasles

donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 1 + 1 = 2$

donc $(S_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite croissante et majorée, elle est donc convergente d'après le théorème de la limite monotone (on aurait aussi pu parler d'une série à termes positifs majorée).

Exercice 13

Soit f la fonction définie sur son domaine de définition $\mathscr{D}_f$ par

$$f(x) = \frac{1}{1+x}$$

On définit une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

On pose $I = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

1. Déterminer $\mathscr{D}_f$
2. Etudier les variations de f sur $[0, +\infty[$
3. Montrer que $f\langle I\rangle \subset I$
4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$
5. Déterminer les *points fixes* de f, c'est-à-dire les solutions de l'équation $f(x) = x$. On note α l'unique point fixe de f tel que $\alpha \in I$
6. Montrer que :
$$\forall x \in I, \quad |f'(x)| \leqslant \frac{4}{9}$$
7. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{4}{9}|u_n - \alpha|$$
8. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{4}{9}\right)^n |u_0 - \alpha|$
9. Etudier la convergence de la suite u

Exercice 14

Soit f la fonction définie sur son domaine de définition $\mathscr{D}_f$ par

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{x}\right)$$

On définit une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

On pose $I = [\sqrt{3}, +\infty[$

1. Déterminer $\mathscr{D}_f$

   f est définie dès que $\frac{3}{x}$ est défini, i.e. $x \neq 0$
   donc $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}^*$

2. Etudier les variations de f sur $]0, +\infty[$

   f est dérivable sur $\mathscr{D}_f$ (somme de fonctions dérivables) et
   $\forall x \in]0, +\infty[, f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{3}{x^2}\right)$
   donc $f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{3}{x^2} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{3}{x^2} \leqslant 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{3} \geqslant 1$ (car la fonction inverse est décroissante sur $]0, +\infty[$
   $\Leftrightarrow x^2 \geqslant 3 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} \geqslant \sqrt{3}$ (car la fonction racine est croissante sur $\mathbb{R}_+$
   $\Leftrightarrow |x| \geqslant \sqrt{3} \Leftrightarrow x \geqslant \sqrt{3}$ (car $x \geqslant 0$)
   de même $f'(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant \sqrt{3}$
   donc f est décroissante sur $\left]0, \sqrt{3}\right]$ et croissante sur $\left[\sqrt{3}, +\infty\right[$ (i.e. sur I)

3. Montrer que $f\langle I\rangle \subset I$

   Soit $x \in I$, alors $\sqrt{3} \leqslant x$ et donc $f\left(\sqrt{3}\right) \leqslant f(x)$ car f est croissante sur I
   or $f\left(\sqrt{3}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} + \frac{3}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} + \sqrt{3}\right) = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$
   donc $\sqrt{3} \leqslant f(x)$, i.e. $f(x) \in I$
   donc $f\langle I\rangle \subset I$ (l'image de tout élément de I est dans I)

4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$

Du grand classique, par récurrence ! Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $P(n) : u_n \in I$

Initialisation : $u_0 = 2 = \sqrt{4} \geqslant \sqrt{3}$ (car la fonction racine est croissante), donc $u_0 \in I$ et donc $P(0)$ est vraie

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $P(n)$ est vraie
par hypothèse $u_n \in I$ donc $f(u_n) \in I$ d'après **3.**
i.e. $u_{n+1} \in I$ donc $P(n+1)$ est vraie, d'où l'hérédité
donc par théorème de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ est vraie, i.e. $u_n \in I$

5. Déterminer les points fixes de f et étudier le signe de $f(x) - x$ pour $x \in \mathbb{R}^*$

Soit $x \in \mathbb{R}^*$ alors $f(x) = x \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{x}\right) = x \Leftrightarrow x + \frac{3}{x} = 2x \Leftrightarrow \frac{3}{x} = x \Leftrightarrow 3 = x^2$ (bien équivalent car $x \neq 0$
donc $f(x) = x \Leftrightarrow x = -\sqrt{3}$ ou $x = \sqrt{3}$

Par ailleurs, on trouve de même $f(x) - x \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{3}{x} \geqslant x$
1er cas : $x > 0$
alors $f(x) - x \geqslant 0 \Leftrightarrow 3 \geqslant x^2 \Leftrightarrow \sqrt{3} \geqslant x$
2ème cas : $x < 0$
alors $f(x) - x \geqslant 0 \Leftrightarrow 3 \leqslant x^2 \Leftrightarrow \sqrt{3} \leqslant \sqrt{x^2} \Leftrightarrow \sqrt{3} \leqslant |x|$
$\Leftrightarrow \sqrt{3} \leqslant -x \Leftrightarrow -\sqrt{3} \geqslant x$
finalement $f(x) - x \leqslant 0$ sur $\left[-\sqrt{3}, 0\right[\cup \left[\sqrt{3}, +\infty\right[$ et posatif sinon.

6. **a.** Etudier la monotonie de u

D'après **4.**, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$
donc d'après **5.**, $\forall n \in \mathbb{N}, f(u_n) - u_n \leqslant 0$ donc $f(u_n) \leqslant u_n$ i.e. $u_{n+1} \leqslant u_n$
donc u est décroissante

b. En déduire que u converge vers un réel ℓ

u est décroissante et minorée (car $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$, donc $u_n \geqslant \sqrt{3}$) donc d'après le théorème de la limite monotone, u converge vers un réel ℓ

c. Montrer que $\ell = \sqrt{3}$

D'après la question précédente, $u_n \to \ell$
donc $f(u_n) \to f(\ell)$ car f est continue
or par propriété $u_n \to \ell \Rightarrow u_{n+1} \to \ell$
or $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$, donc par unicité de la limite, $\ell = f(\ell)$
donc ℓ est un point fixe de f, donc $\ell = \sqrt{3}$ ou $\ell = -\sqrt{3}$
or $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant \sqrt{3}$ donc par passage à la limite dans l'inégalité, $\ell \geqslant \sqrt{3}$
de fait $\ell \neq -\sqrt{3}$ et de fait $\ell = \sqrt{3}$

7. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|u_{n+1} - \sqrt{3}\right| \leqslant \frac{1}{2}\left|u_n - \sqrt{3}\right|$$

Comme dans l'**exercice 13**, on va démontrer cela grâce à l'inégalité des accroissement finis et dans un premier temps, il faut majorer $|f'(x)|$, on va le faire sur l'intervalle I
d'après la question **2.** $\forall x \in I, f'(x) \geqslant 0$ et donc $|f'(x)| = f'(x)$
de plus $f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{3}{x^2}\right) \Rightarrow f'(x) \leqslant \frac{1}{2}$, i.e. $|f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$
Soit $n \in \mathbb{N}$, on peut donc appliquer l'IAF, en prenant $a = \sqrt{3}$ et $b = u_n$ qui sont bien des éléments de I, donc :
$\left|f(u_n) - f\left(\sqrt{3}\right)\right| \leqslant \frac{1}{2}\left|u_n - \sqrt{3}\right|$ i.e.
$\left|u_{n+1} - \sqrt{3}\right| \leqslant \frac{1}{2}\left|u_n - \sqrt{3}\right|$ car $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f\left(\sqrt{3}\right) = \sqrt{3}$

8. En déduire que la suite u converge vers $\sqrt{3}$

De nouveau comme à l'**exercice 13**, on va montrer dans un premier temps : $P(n)$: « $\left|u_n - \sqrt{3}\right| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n \left|u_0 - \sqrt{3}\right|$ » que l'on définit pour $n \in \mathbb{N}$

Initialisation : $P(0)$ est vraie $\Leftrightarrow \left|u_0-\sqrt{3}\right| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left|u_0-\sqrt{3}\right| \Leftrightarrow$
$\left|u_0-\sqrt{3}\right| \leqslant \left|u_0-\sqrt{3}\right|$
ce qui est vrai, donc $P(0)$ est vraie

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $P(n)$ est vraie
d'après **7.**, $\left|u_{n+1}-\sqrt{3}\right| \leqslant \frac{1}{2}\left|u_n-\sqrt{3}\right|$
or par hypothèse $\left|u_n-\sqrt{3}\right| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n \left|u_0-\sqrt{3}\right|$
donc $\frac{1}{2}\left|u_n-\sqrt{3}\right| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \left|u_0-\sqrt{3}\right|$
et donc $\left|u_{n+1}-\sqrt{3}\right| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \left|u_0-\sqrt{3}\right|$ i.e. $P(n+1)$ est vraie, d'où l'hérédité
donc par théorème de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ est vraie.

On peut alors conclure, car $\left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$ (suite géométrique de raison $|q|<1$)
donc par théorème des gendarmes, $\left|u_n-\sqrt{3}\right| \to 0$ ce qui équivaut à $u_n \to \sqrt{3}$

Option B (qui évite la récurrence) :
pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \left|u_n-\sqrt{3}\right|$
alors d'après **7.**, $v_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}v_n$
or $v_n \geqslant 0$ donc $\frac{1}{2}v_n \leqslant v_n$ et donc $v_{n+1} \leqslant v_n$
donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée (car positive) donc d'après le théorème de la limite monotone, elle converge vers un réel ℓ' et $\ell' \geqslant 0$ car $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \geqslant 0$
de fait $\frac{1}{2}v_n \to \frac{\ell'}{2}$
et donc par passage à la limite dans l'inégalité $v_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}v_n$,
on obtient $\ell' \leqslant \frac{\ell'}{2}$ et donc $\frac{\ell'}{2} \leqslant 0$, i.e. $\ell' \leqslant 0$
or $\ell' \geqslant 0$ donc $\ell' = 0$ puis on conclut de même

9. Déterminer un entier N tel que $\left|u_N-\sqrt{3}\right| \leqslant 10^{-7}$

Pour cela, on a besoin du résultat démontré au **8.** avec la récurrence :
$\forall n \in \mathbb{N}, \left|u_n-\sqrt{3}\right| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n \left|u_0-\sqrt{3}\right|$
comme $u_0 = 2$ et $1 \leqslant \sqrt{3} \leqslant 2$, alors $\left|u_0-\sqrt{3}\right| \leqslant 1$
donc en fait $\forall n \in \mathbb{N}, \left|u_n-\sqrt{3}\right| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$
donc dès lors que $\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant 10^{-7}$, on aura le résultat escompté
or $\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant 10^{-7} \Leftrightarrow n\ln\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant -7\ln(10)$ (car les fonctions ln et exp sont croissantes)
$\Leftrightarrow -n\ln(2) \leqslant -7\ln(10) \Leftrightarrow n\ln(2) \geqslant 7\ln(10) \Leftrightarrow n \geqslant \frac{7\ln(10)}{\ln(2)}$
on trouve donc que le premier entier qui satisfait cette condition est $n = 24$ (on pourrait trouver cette valeur en sachant que $2^{10} \geqslant 10^3$)
cela signifie que le calcul de u_{24} (avec Python par exemple) nous donne une valeur approchée de $\sqrt{3}$ dont la précision est d'au moins 10^{-7}

Exercice 15

Soit f l'application

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{e^x}{e^x+1} \end{array}$$

On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1. Dresser le tableau de variations complet de f (on fera apparaitre les limites).

f est dérivable sur $\mathscr{D}_f$ (quotient de fonctions dérivables) et
$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \dfrac{e^x(e^x+1) - e^x \times e^x}{(e^x+1)^2} = \dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}$
donc f est strictement croissante sur R, il faut alors calculer les limites pour compléter le tableau :
d'une part $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ donc par opérations $\lim\limits_{x\to-\infty} = \dfrac{0}{0+1} = 0$
et en $+\infty$, on factorise pour lever l'indétermination :
$f(x) = \dfrac{e^x}{e^x(1+e^{-x})} = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$ et donc par opérations $\lim\limits_{x\to-\infty} = 1$
on peut donc dresser le tableau de variations de f

x	$-\infty$	$+\infty$
f	0 $\nearrow$	1

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in [0,1]$

$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ donc $u_{n+1} \in [0,1]$
car d'après la question précédente, $f\langle\mathbb{R}\rangle \subset [0,1]$
et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \in [0,1] \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in [0,1]$

3. Montrer que f admet un unique point fixe α et que $\alpha \in]0,1[$ (<u>indication</u> : étudier la fonction g définie par $g(x) = f(x) - x$).

Comme suggéré, on pose, pour $x \in \mathbb{R}, g(x) = f(x) - x$
donc g est dérivable et $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = f'(x) - 1$
or $f'(x) = \dfrac{e^x}{(e^x+1)^2} < 1$ car $e^x < (e^x+1)^2 = e^{2x} + 2e^x + 1$
donc $g'(x) < 0$ et donc g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$
de plus $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$
car $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$
de plus g est continue, donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$
de fait l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution
par ailleurs $g(0) = f(0) = \dfrac{1}{2} > 0$ et $g(1) = f(1) - 1 < 0$ (car $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) < 1$)
donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires (g étant toujours continue), $g(x) = 0$ admet une solution sur $[0,1]$ et même sur $]0,1[$ car $g(0) \neq 0$ et $g(1) \neq 1$
or α est l'unique solution de cette équation sur $\mathbb{R}$, donc $\alpha \in]0,1[$

4. Montrer que : $\forall x \in [0,1], |f'(x)| \leqslant \dfrac{e}{4}$

soit $x \in [0,1]$, alors $1 \leqslant e^x \leqslant e$ (car la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$)
et donc $e^x + 1 \geqslant 2$ et donc $(e^x+1)^2 \geqslant 4$ car la fonction carré est croissante sur $\mathbb{R}_+$
donc $\dfrac{1}{(e^x+1)^2} \leqslant \dfrac{1}{4}$ et donc en multipliant par l'inégalité $e^x \leqslant e$,
on obtient $\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2} \leqslant \dfrac{e}{4}$
i.e. $f'(x) \leqslant \dfrac{e}{4}$ et donc $|f'(x)| \leqslant \dfrac{e}{4}$ car $f'(x) \geqslant 0$

5. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{e}{4}|u_n - \alpha|$$

D'après la question précédente, et avec $n \in \mathbb{N}^*$, on peut donc appliquer l'IAF sur $[0,1]$, en prenant $a = \alpha$ et $b = u_n$ qui sont bien des éléments de $[0,1]$, donc :
$|f(u_n) - f(\alpha)| \leqslant \dfrac{e}{4}|u_n - \alpha|$ i.e.

$|u_{n+1}-\alpha| \leqslant \dfrac{e}{4}\,|u_n-\alpha|$ car $f(u_n)=u_{n+1}$ et $f(\alpha)=\alpha$

6. Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |u_n-\alpha| \leqslant \left(\frac{e}{4}\right)^{n-1}$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $P(n)$: $|u_n-\alpha| \leqslant \left(\dfrac{e}{4}\right)^{n-1}$

Initialisation : $P(1)$ est vraie $\Leftrightarrow |u_1-\alpha| \leqslant \left(\dfrac{e}{4}\right)^{1-1}=1$
ce qui est vrai car $u_1 \in [0,1]$ et $\alpha \in [0,1]$,
donc $P(1)$ est vraie

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que $P(n)$ est vraie
d'après **5.**, $|u_{n+1}-\alpha| \leqslant \dfrac{e}{4}\,|u_n-\alpha|$
or par hypothèse $|u_n-\alpha| \leqslant \left(\dfrac{e}{4}\right)^{n-1}$
donc $\dfrac{e}{4}|u_n-\alpha| \leqslant \left(\dfrac{e}{4}\right)^{n}$
et donc $|u_{n+1}-\alpha| \leqslant \left(\dfrac{e}{4}\right)^{n}$ i.e. $P(n+1)$ est vraie, d'où l'hérédité
donc par théorème de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n)$ est vraie.

7. Conclure quand à la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

On peut alors conclure sur la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ car $\left(\dfrac{e}{4}\right)^{n} \to 0$ (suite géométrique de raison $|q|<1$)
donc par théorème des gendarmes, $|u_n-\alpha| \to 0$ ce qui équivaut à $u_n \to \alpha$

8. Déterminer un entier N tel que $|u_N-\alpha| \leqslant 10^{-3}$

D'après **6.**, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |u_n-\alpha| \leqslant \left(\dfrac{e}{4}\right)^{n-1}$
donc dès lors que $\left(\dfrac{e}{4}\right)^{n-1} \leqslant 10^{-3}$, on aura le résultat escompté
or $\left(\dfrac{e}{4}\right))^{n-1} \leqslant 10^{-3} \Leftrightarrow (n-1)\ln\left(\dfrac{e}{4}\right) \leqslant -3\ln(10)$ (car les fonctions ln et exp sont croissantes)
$\Leftrightarrow (n-1)(1-\ln(4)) \leqslant -3\ln(10) \Leftrightarrow (n-1)(\ln(4)-1) \geqslant 3\ln(10) \Leftrightarrow n \geqslant 1+\dfrac{3\ln(10)}{\ln(4)-1}$
on trouve donc que le premier entier qui satisfait cette condition est $n=19$ (difficile sans outil de calcul)
cela signifie que le calcul de u_{19} (avec Python par exemple) nous donne une valeur approchée de α dont la précision est d'au moins 10^{-3}

9. Ecrire un script `Python` qui permet d'obtenir un tel entier N

Justement ! Tant que le seuil de 10^{-3} n'est pas atteint, on va calculer de manière itérative les puissances de $\dfrac{e}{4}$, en calculant au passage les valeurs de u_n Il faut quand même une valeur de u_0 (l'énoncé ne le précise pas), on choisit ici $u_0=2$

```
import numpy as np
u=2
n=0
while (np.exp(1)/4)**(n-1)>10**(-3) :
  n=n+1
  u=np.exp(u)/(np.exp(u)+1)
print(u,'est une valeur approchee de alpha a 0,001 près')
```