

Cet outil est très utilisé en sciences sociales pour représenter des individus et leurs différents liens, par exemple pour l'étude des réseaux sociaux. L'objectif va être de pouvoir identifier les communautés formées, les centres d'intérêt communs. Une exploitation intelligente de ces données est indispensable pour suggérer à l'utilisateur les choses qu'il est susceptible d'aimer, les personnes qu'il connaît peut-être et pour créer des publicités ciblées adaptées à chacun.

Un résultat étonnant : en moyenne seules 8 personnes vous séparent de n'importe quelle autre personne à la surface de la Terre. Si vous prenez la connaissance de la connaissance.... d'une de vos connaissances, en moyenne 8 personnes permettront de vous connecter avec n'importe quel français, américain, indien ou japonais. Et il est rare de dépasser 11 ou 12. Il s'agit là du diamètre moyen du graphe social de l'humanité (source : *zeste de savoir*).

Objectifs d'apprentissage

A la fin de ce chapitre, je sais :

- représenter une situation à l'aide d'un graphe ☐
- reconnaître différents types de graphes : orienté, complet, connexe, eulérien et leurs éléments caractéristiques : sommets, degrés, arêtes, chaînes ☐
- écrire et interpréter une matrice d'adjacence ☐
- interpréter les puissances d'une matrice d'adjacence et utiliser ses propriétés ☐
- utiliser et interpréter la formule d'Euler (dite des poignées de main) ☐

Définitions

Définitions :

un **graphe** est un ensemble de points, dont certaines paires sont reliées par un (ou plusieurs) lien(s),

ces points sont nommés **sommets** (parfois nœuds) et ces liens sont nommés **arêtes**,

deux sommets reliés par une arête sont dits **adjacents**,

une arête reliant un sommet à lui-même est appelé **boucle**,

un graphe est **simple** si le graphe est sans boucle et s'il y a au plus une arête entre deux sommets,

l'**ordre** d'un graphe est le nombre de ses sommets,

le **degré** d'un sommet est le nombre d'arêtes dont le sommet est une extrémité,

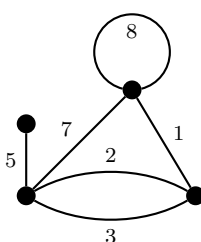
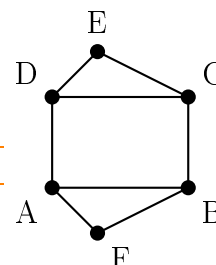
un graphe est dit **pondéré** lorsqu'un réel positif est affecté à chaque arête.

Remarque : ces points n'ont pas de position absolue dans le plan, ni de position relative les uns par rapport aux autres.

Exemple 1 :

ce graphe

est d'ordre 6 et il possède 4 sommets de degré 3, 2 sommets de degré 2 et 8 arêtes



Exemple 2 :

ce graphe est pondéré.

ce n'est pas un graphe simple car il possède une boucle ou car deux sommets sont reliés par deux arêtes différentes

⚠ Attention, dans le cas d'une boucle, une arête est comptée deux fois.

Propriété - formule d'Euler

(ou formule des poignées de main) :

la somme des degrés de tous les sommets d'un graphe est égale au double du nombre total d'arêtes.

En particulier, la somme des degrés est un nombre pair.

Exemples : avec le graphe 1 ci-dessus, on trouve que la somme des degrés vaut 16 soit 2×8 (8 arêtes)

Dans une petite ville, il y a 15 appareils téléphoniques. Est-il possible de les relier par des fils téléphoniques pour que chaque appareil soit relié avec exactement 5 autres ?

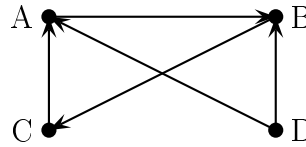
Non, la somme des degrés serait alors de 75

Graphe orienté

Définition :

on appelle **graphe orienté** un graphe dont les arêtes sont orientées, c'est à dire dirigées d'un sommet à l'autre, on les représente alors avec une flèche.

Exemple 3 :



⚠ on n'applique pas la formule des poignées de main aux graphes orientés.

Représentation matricielle

Définition : avec G un graphe (non orienté ou orienté) d'ordre n ($n \in \mathbb{N}^*$) dont les sommets sont numérotés de 1 à n

on appelle **matrice d'adjacence** du graphe G la matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :
 $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, m_{ij} =$ nombre d'arêtes reliant le sommet i au sommet j

Définitions : une **chaîne** est une liste de sommets dont deux sommets consécutifs sont reliés par une arête. La **longueur** d'une chaîne est le nombre d'arêtes constituant la chaîne.

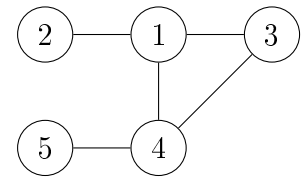
Remarques : si le graphe est

- non orienté, la matrice est symétrique ;
- orienté, il faut considérer le sens de la flèche.

Exemple (3 ci-dessus) :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple 4 :



Voir matrice ci-dessous

Propriété : si G est un graphe non orienté ayant n sommets numérotés de 1 à n et M sa matrice d'adjacence, et $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ alors pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, M_{ij}^k$ est égal au nombre de chaînes de longueur k reliant le sommet i au sommet j (M_{ij}^k est le coefficient de la ligne i et de la colonne j de la matrice M^k)

Exemple 4

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Connexité

Définition : un graphe est **connexe** s'il existe une chaîne entre toute paire de sommets.

Propriété : soit G un graphe orienté (ou non) ayant n sommets, alors

G est connexe $\Leftrightarrow$ tous les coefficients de $I_n + M + \dots + M^{n-1}$ sont strictement positifs

Avec l'exemple 3, $I_4 + M + M^2 + M^3 =$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ donc le graphe n'est pas connexe}$$

Ne pas revenir sur ses pas : graphes eulériens

Définitions :

une **chaîne eulérienne** est une chaîne contenant toutes les arêtes du graphe, chacune étant parcourue une seule fois,

un **cycle eulérien** désigne une chaîne eulérienne fermée,

un graphe est dit **eulérien** s'il contient au moins un cycle eulérien.

En fait un graphe connexe admet :

- une chaîne eulérienne ssi au plus deux sommets sont de degré impair,
- un cycle eulérien ssi tous ses sommets sont de degré pair.

Exemples : il n'y a pas de solution aux ponts de Königsberg, car plus de 2 sommets ont un degré impair, $\triangleright$ le graphe de l'exemple 2 contient au moins une chaîne eulérienne mais pas de cycle eulérien.