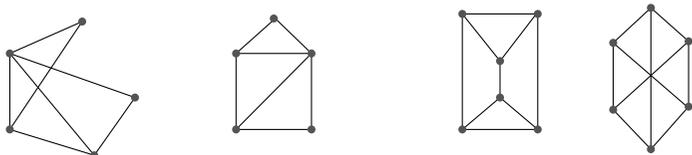


Exercice 1 - Est-ce le même graphe ?

Dire parmi les dessins suivants lesquels représentent le même graphe :



Exercice 2 - Incompatibilité d'humeur

Huit jeunes hommes veulent travailler dans un supermarché dans lequel trois postes sont disponibles. La responsable, soucieux d'éviter les problèmes, veut tenir compte des inimitiés entre ces jeunes hommes :

- Adrien ne peut supporter Damien ;
- Benjamin ne parle plus à Adrien ;
- Cyril refuse de travailler avec Benjamin ;
- Damien ne supporte pas Greg ;
- Eric ne veut cotoyer ni Benjamin, ni Frank, ni Hector ;
- Frank n'apprécie pas Greg et Hector ;
- Greg ne s'entend pas avec Adrien ;
- Hector refuse de travailler avec Frank ou Cyril.

1. Construire un graphe non-orienté traduisant cette situation d'incompatibilité d'humeur.
2. Eric a le meilleur CV. Qui peut-on embaucher avec lui ?
3. Donner une autre combinaison possible de trois jeunes, autres qu'Eric, que l'on peut embaucher.

Exercice 3

Lors d'une soirée, Charlotte entend 28 tintements de verre. En supposant que chaque personne a trinqué une et une seule fois avec les autres, donner le nombre de personnes présentes à la soirée.

Exercice 4

Soit G un graphe simple avec n sommets et p arêtes.

Montrer que $p \leq \frac{n(n-1)}{2}$

Exercice 5

Soit G un graphe simple non-orienté d'ordre $2p$

Montrer que si le degré de chaque sommet est au moins égal à p , alors G est connexe.

Exercice 6 - Ménager la chèvre et le chou

Un loup, une chèvre et un chou doivent traverser une rivière. Mais la barque du passeur est trop petite, et il ne peut transporter avec lui qu'un élément à la fois. Comment faire, sachant que le loup et la chèvre ne peuvent rester seuls sur une rive, de même que la chèvre et le chou ?

Exercices plus théoriques

Exercice 7 - Les amis

Avez-vous jamais remarqué que dans un groupe de personnes, il y a toujours deux individus qui connaissent exactement le même nombre de membres du groupe ?

1. Formaliser la propriété à démontrer dans le vocabulaire des graphes.
2. Démontrer cette propriété (on pourra raisonner par l'absurde et supposer que la propriété à prouver n'est pas vraie pour un graphe à n sommets).

Exercice 8 - Isthme

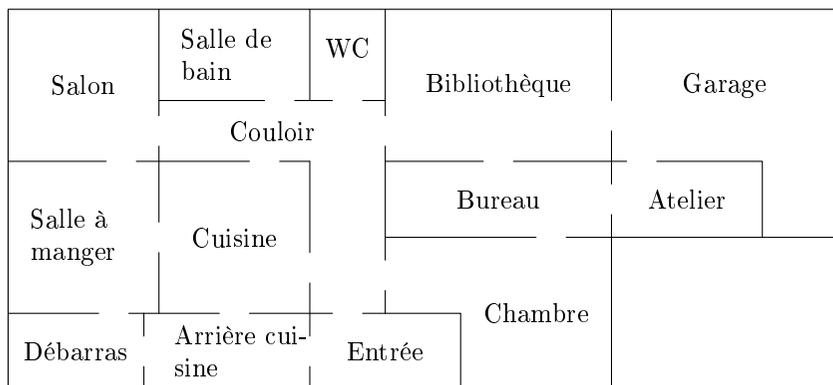
On a construit des ponts entre les îles d'un archipel de sorte de pouvoir aller (directement ou indirectement) de toute île à une autre. De plus, de chaque île part un nombre pair de ponts. On a remarqué que, lorsqu'un pont est inaccessible pour cause de travaux, on peut encore aller de toute île à une autre.

1. Traduire ce problème en terme de théorie des graphes.
2. Prouver le résultat !

Hors programme

Exercice 9 - Sherlock vous poursuit

Voici le plan d'une maison où un meurtre a été commis :

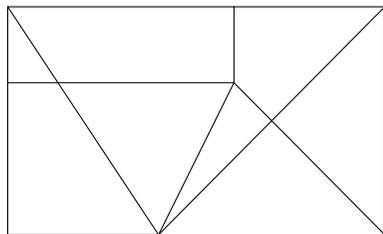


1. Réaliser votre déplacement dans la maison en fonction des contraintes données dans cette vidéo Micmaths
2. Sherlock Holmes a-t-il simplement du flair ?

Chaînes, cycles et graphes eulériens

Exercice 10 - Sans lever le crayon

On considère le dessin ci-contre :
Est-il possible de le dessiner sans lever le crayon et en passant une, et une seule fois, par chaque trait ?



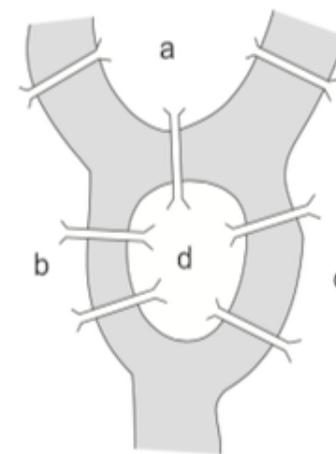
Exercice 11

A quelle condition sur n un graphe complet d'ordre n est eulérien ?

Exercice 12 - les ponts de Königsberg

La ville de Königsberg est traversée par la rivière Pregolya, et comporte deux îles. Ces îles sont reliées entre elles et aux berges par des ponts, comme sur la figure ci-dessous.

- Est-il possible de passer d'une berge à l'autre de la ville en passant, une et une seule fois, par tous les ponts que la ville comporte ?
- Est-il possible de passer une et une seule fois par chaque pont, et de revenir à son point de départ ?



Coloration d'un graphe

Exercice 13 - Choix d'options

A un examen, les candidats peuvent choisir 2 ou 3 options parmi les 6 options proposées : graphes, vélo, langue régionale, guitare, latin et natation. Certains élèves ont choisi les options graphes, langue régionale, guitare. D'autres vélo et latin ; D'autres enfin langue régionale et natation. A l'aide de la théorie des graphes, répondez aux questions suivantes :

1. Combien peut-on programmer d'épreuves d'option au maximum sur un même créneau ?
2. Quelle est la durée minimum de l'ensemble des épreuves optionnelles (en nombre de créneaux consécutifs) ?

Vers les chaînes de Markov

Exercice 14

Un mobile se déplace sur les sommets d'un triangle. Lorsqu'il est sur un sommet à l'étape n , il passe à un des deux sommets adjacents à l'étape $n + 1$ avec équiprobabilité.

1. Représenter le graphe pondéré correspondant à la transition d'une étape n à une étape $n + 1$
2. Déterminer la matrice d'adjacence associée.