Un corrigé

Exercice 8 - Isthme

On a construit des ponts entre les iles d'un archipel de sorte de pouvoir aller (directement ou indirectement) de toute ile à une autre. De plus, de chaque ile part un nombre pair de ponts. On a remarqué que, lorsqu'un pont est inaccessible pour cause de travaux, on peut encore aller de toute ile à une autre.

1. Traduire ce problème en terme de théorie des graphes.

Dans un graphe non orienté et connexe dont tous les sommets ont un degré pair, alors si on retire une arête, le graphe reste connexe.

2. Prouver le résultat !

On enlève une arête dans ce graphe (on l'appelle l'arête AB ci-dessous).

Option 1 : on raisonne par l'absurde : supposons qu'alors le graphe ne soit plus connexe.
Cela signifie qu'il existe deux sommets qu'on ne peut pas relier, et c'est forcément le cas de A et B (sinon l'arête AB ne servait à rien dans la connexité initiale et le graphe resterait connexe, puisque l'arête AB serait « remplacée » par une chaine). Il existe alors deux « sous-graphes » connexes : G_A (contenant A et tous les points reliés à A) et G_B (contenant B et tous les points reliés à B). Mais alors tous les sommets de G_A sont de degré pair sauf A, donc la somme des degrés est un nombre impair ce qui est contradictoire avec la formule d'Euler (des poignées de main).

Option 2 (fausse) : à l'aide des critères d'Euler

Comme le graphe est connexe, tous les sommets sont de degrés pairs et non nuls (s'il existait un sommet de degré 0 alors il ne serait pas relié aux autres et les graphe ne serait pas connexe).
En ayant supprimé l'arête AB, tous les sommets du graphe sont de degré pair sauf A et B, i.e. au plus deux sommets ne sont pas de degré pair. Donc il existe une chaine eulérienne dans ce graphe, donc qui parcourt toutes les arêtes et donc tous les sommets car aucun n'est de degré nul, en particulier le graphe est connexe.
En fait, cette option comporte une erreur de raisonnement puisque les critères d'Euler s'appliquent à des graphes connexes (ce qu'on doit justement démontrer ici). On ne peut donc utiliser ce critère ainsi.

Option 3 : à l'aide des critères d'Euler quand même puisque l'énoncé nous en donne envie (avec la parité des degrés).

Dans le graphe initial (avant la suppression de l'arête), comme le graphe est connexe, on peut appliquer le critère d'Euler, à savoir que le graphe contient un cycle eulérien puisque tous les sommets sont de degré pair.
Si on supprime désormais l'arête AB, quitte à faire « tourner » les sommets, on peut écrire le cycle du graphe d'origine sous la forme : $A, S_1, S_2, S_3, \ldots, B, A$ (car, par définition, ce cycle passe par toutes les arêtes, donc entre autres par l'arête AB, que l'on place en dernier), où $S_1, S_2, \ldots, S_n$ sont les n autres sommets parcourus par ce cycle (il est possible d'avoir plusieurs fois le même).
Donc en enlevant l'arête AB, il existe toujours la chaine $A, S_1, S_2, S_3, \ldots, B$ qui est par définition une chaine eulérienne (elle passe par toutes les arêtes du graphe initial moins l'arête AB, qui est l'arête qui n'existe plus dans le nouveau graphe).
Donc le graphe est connexe (puisqu'il admet une chaine eulérienne).