Objectifs d'apprentissage
A la fin de ce chapitre, je sais :
- trouver des primitives de fonctions définies par une forme usuelle ☐
- calculer des intégrales à l'aide de la définition, d'une intégration par parties ou d'un changement de variables ☐
- exploiter les propriétés de l'intégrale : linéarité, relation de Chasles, positivité, croissance ☐
- interpréter graphiquement une intégrale comme une aire ☐

1 Primitive

Définition : soit f une fonction f définie sur un intervalle I, on dit qu'une fonction F est une **primitive** de f lorsque elle est dérivable et que $F' = f$	Exemples : $F(x) = 3$ est une primitive de $f(x) = 0$ $G(x) = -5$ en est une autre $x \mapsto x\ln(x) - x$ est une primitive de $x \mapsto \ln(x)$
Propriété : toute fonction continue admet une primitive	Remarque : toutes les fonctions usuelles sauf la partie entière (encore que...) admettent des primitives.

Les primitives de base

Fonction : $x \mapsto$	Primitive : $x \mapsto$	Fonction : $x \mapsto$	Primitive : $x \mapsto$
$c \quad (c \in \mathbb{R}^*)$	cx	x	$\dfrac{x^2}{2}$
x^2	$\dfrac{x^3}{3}$	x^3	$\dfrac{x^4}{4}$
$\dfrac{1}{x^2}$	$-\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{1}{x^3}$	$-\dfrac{1}{2x^2}$
$nx^{n-1} (n \in \mathbb{Z})$	x^n	$x^{-1} = \dfrac{1}{x}$	$\ln\|x\|$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$\sqrt{x}$	$\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$
$x^\alpha \quad (\alpha \neq -1)$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	e^x	e^x

Remarque : $x \mapsto \ln(x)$ est bien une primitive de : $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$, mais pour avoir une primitive aussi sur $]-\infty, 0[$, il faut compléter d'où le $\ln|x|$ (qui vaut $\ln(-x)$ sur $]-\infty, 0[$)

Les primitives des composées de base

Fonction	Primitive	Fonction	Primitive
$u'u$	$\dfrac{u^2}{2}$	$u'u^2$	$\dfrac{u^3}{3}$
$u'u^3$	$\dfrac{u^4}{4}$	$u'u^n \quad (n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\})$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$
$\dfrac{u'}{u^2}$	$-\dfrac{1}{u}$	$u'u^\alpha \quad \alpha \neq -1$	$\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$u'\sqrt{u} = u'u^{\frac{1}{2}} \quad (u > 0)$	$\dfrac{2}{3}u^{3/2}$	$\dfrac{u'}{\sqrt{u}} = u'u^{-\frac{1}{2}} \quad (u > 0)$	$2\sqrt{u} = 2u^{\frac{1}{2}}$
$u'u^{-1} = \dfrac{u'}{u}$	$\ln\|u\|$	$u'e^u$	e^u

Propriétés : • si F est une primitive de f alors $\forall c \in \mathbb{R}, F+c$ est une primitive de f • si F_1 et F_2 sont deux primitives d'une même fonction alors $\exists c \in \mathbb{R}, F_1 - F_2 = c$	Exemple : $x \mapsto 3x^2$ est une primitive de $x \mapsto 6x$ $x \mapsto 3x^2+11$ et $x \mapsto 3x^2-50$ en sont deux autres Les primitives (i.e. toutes) de $x \mapsto (2x-5)(x^2-5x-4)$ sont les fonctions $x \mapsto (x^2-5x-4)^2+c$ où $c \in \mathbb{R}$

2 Intégrale

Définition : f est une fonction continue sur $[a,b]$ **l'intégrale** de f sur $[a,b]$ est le nombre $F(b)-F(a)$ noté $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b)-F(a)$ où F est une primitive de f sur $[a,b]$ Notation : $F(b)-F(a) = [F(x)]_a^b$	Remarque : si G est une autre primitive alors $G(b)-G(a) = F(b)+c-(F(a)+c)$ $= F(b)-F(a)+c-c = F(b)-F(a)$ Exemple : $\displaystyle\int_0^3 e^{5x-2}\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{5}e^{5x-2}\right]_0^3 = \frac{1}{5}\left(e^{13}-e^{-2}\right)$
Convention : si $a \leqslant b$, on peut parler de $\displaystyle\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$	Cela est cohérent avec la définition : $\displaystyle\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = F(a)-F(b) = -(F(b)-F(a))$

2.1 Premières propriétés de l'intégrale

Propriété - linéarité de l'intégrale : si f et g sont deux fonctions continues, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ $\displaystyle\int_a^b (\lambda f(x)+\mu g(x))\,\mathrm{d}x = \lambda\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \mu\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$	Exemple : $\displaystyle\int_{-1}^0 \left(3(x^4+2) - \frac{x}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x$ $\displaystyle= 3\int_{-1}^0 (x^4+2) - \int_{-1}^0 \frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x$ $\displaystyle= 3\left[\frac{x^5}{5}+2x\right]_{-1}^0 - \left[\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]_{-1}^0 = \dots$
Propriété - relation de Chasles : avec $a \leqslant b \leqslant c$ $\displaystyle\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x$	Remarque : on peut l'étendre à plus de sous-intervalles $\displaystyle\int_0^{10} f = \int_0^1 f + \int_1^2 f + \dots + \int_9^{10} f$

2.2 Intégrale et inégalités

Propriété - positivité de l'intégrale : si $\forall x \in [a,b],\ f(x) \geqslant 0$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$ si $\forall x \in [a,b],\ f(x) \leqslant 0$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant 0$	⚠ Attention aux bornes : il faut que $a \leqslant b$ Remarque : la propriété est évidente car si f est positive, alors toute primitive F est croissante et donc $a \leqslant b \Rightarrow F(a) \leqslant F(b)$
Propriété - croissance de l'intégrale : $\displaystyle\forall x, f(x) \leqslant g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$	Remarque : là aussi, on peut le démontrer facilement car $f(x) \leqslant g(x) \Rightarrow (f-g)(x) \leqslant 0$ $\displaystyle\Rightarrow \int_a^b (f-g)(x)\mathrm{d}x \leqslant 0$ puis on conclut par linéarité de l'intégrale

Dans le cas où $m \leqslant f(x) \leqslant M$, on trouve $\displaystyle\int_a^b m\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b M\mathrm{d}x$, ce qui permet de retrouver le résultat de l'inégalité des accroissements finis : $m(b-a) \leqslant F(b)-F(a) \leqslant M(b-a)$

Propriété : si $a \leqslant b$ $$\left\lvert\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right\rvert \leqslant \int_a^b \lvert f(x)\rvert\mathrm{d}x$$	Exemple : avec $0 \leqslant a \leqslant b$ $$\left\lvert\int_a^b \frac{1-x}{1+x}\mathrm{d}x\right\rvert \leqslant \int_a^b \left\lvert\frac{1-x}{1+x}\right\rvert\mathrm{d}x \leqslant b-a$$ car $\left\lvert\frac{1-x}{1+x}\right\rvert = \frac{\lvert 1-x\rvert}{\lvert 1+x\rvert} = \frac{\lvert 1-x\rvert}{1+x} \leqslant \frac{\lvert 1\rvert+\lvert x\rvert}{1+x} = 1$
Propriété : si f est continue et positive sur $[a,b]$, alors $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0 \Leftrightarrow f = 0$$	Exemple : si $\int_a^b f(x)^2\mathrm{d}x = 0 \quad (a<b)$ $\forall x \in [a,b], f(x)^2 \geqslant 0$ et f^2 est continue donc d'après la propriété $f^2 = 0$ or $\forall x \in [a,b], f(x)^2 = 0 \Rightarrow f(x) = 0$ donc $f = 0$

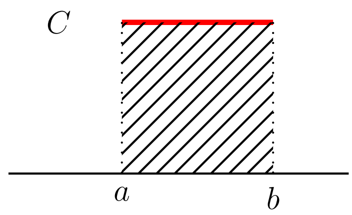
2.3 Primitive définie par une intégrale

Propriété : si f est une fonction continue sur un intervalle I et $a \in I$, alors $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est une primitive de f sur I c'est la primitive qui s'annule en a	Exemple : $\int_1^x \ln\left(\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\mathrm{d}t$ est une primitive de $t \mapsto \ln\left(\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ c'est la primitive qui s'annule en 1

2.4 Techniques de calcul d'intégrale

Propriété - intégration par parties avec u, v deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$, $$\int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x$$	Exemple : $$\int_1^2 x\ln(x)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\ln(x)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2}\times\frac{1}{x}\mathrm{d}x$$ avec $u'(x) = x$ donc $u(x) = \frac{x^2}{2}$ et $v(x) = \ln(x)$ donc $v'(x) = \frac{1}{x}$ donc $$\int_1^2 x\ln(x)\mathrm{d}x = 2\ln(2) - 0 - \int_1^2 \frac{x}{2}\mathrm{d}x$$ $$= 2\ln(2) - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^2 = 2\ln(2) - \frac{1}{2}$$
Propriété - changement de variable avec $u : I \to J$ une fonction $\mathscr{C}^1$ (strictement monotone) et f une fonction continue sur J $$\int_{u(a)}^{u(b)} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(u(t))\,u'(t)\mathrm{d}t$$	Exemple : $$\int_0^1 \frac{e^x-1}{e^x+1}\mathrm{d}x = \int_1^e \frac{e^{\ln(t)}-1}{e^{\ln(t)}+1}\times\frac{1}{t}\mathrm{d}t$$ avec $u(t) = \ln(t)$ et donc $u'(t) = \frac{1}{t}$ ⚠ aux bornes, $u(a) = 0 \Leftrightarrow \ln(a) = 0 \Leftrightarrow a = 1$ et $u(b) = 1 \Leftrightarrow \ln(b) = 1 \Leftrightarrow b = e$ donc $$\int_0^1 \frac{e^x-1}{e^x+1}\mathrm{d}x = \int_1^e \frac{t-1}{t(t+1)}\mathrm{d}t$$ or $\frac{2}{t+1} - \frac{1}{t} = \frac{2t}{t(t+1)} - \frac{t+1}{t(t+1)} = \frac{t-1}{t(t+1)}$ donc $\int_0^1 \frac{e^x-1}{e^x+1}\mathrm{d}x = \int_1^e \left(\frac{2}{t+1} - \frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$ $= 2[\ln\lvert t+1\rvert]_1^e - [\ln\lvert t\rvert]_1^e = 2\ln(e+1) - 2\ln(2) - 1$

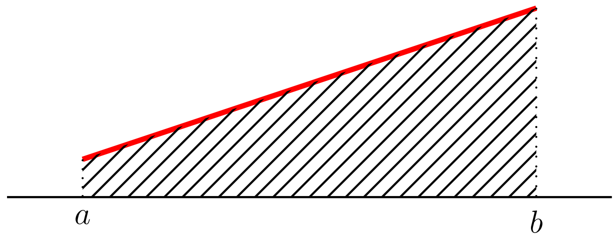
3 Interprétation graphique - aire sous la courbe



Fonction constante égale à C

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b C\mathrm{d}x = C(b-a)$$

aire sous la courbe $= C(b-a)$



Fonction affine

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)\right)\mathrm{d}x$$

$$= \left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\times\frac{(x-a)^2}{2}+f(a)x\right]_a^b$$

$$= \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\times\frac{(b-a)^2}{2}+f(a)(b-a) = \dots$$

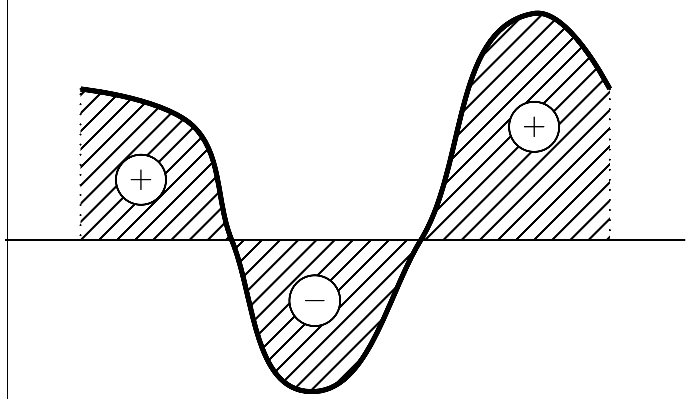
$$= (f(b)+f(a))\frac{b-a}{2}$$

aire sous la courbe $= (b-a)\times\dfrac{f(a)+f(b)}{2}$

Propriété :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \text{aire sous la courbe } \mathscr{C}_f \text{ entre } a \text{ et } b$$

Remarque : on parle d'**aire algébrique** car si f est négative alors l'aire est négative.



Courbe de f et aire algébrique

Propriété - approximation de l'aire par la méthode des rectangles :

si n tend vers $+\infty$ (i.e. les rectangles deviennent de plus en plus étroits) alors ,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \to \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

autrement dit, lorsque leur largeur diminue, l'aire des rectangles se rapproche de la valeur de l'intégrale qui vaut l'aire sous la courbe.