

Corrigé

total sur 23 points

Exercice 1

16 points

Soit f l'application : $]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$

1. a. Calculer $f'(x)$

1 point

f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ en tant qu'opérations de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ et, avec $u(x) = x$ et $v(x) = e^x - 1$ et donc $u'(x) = 1$ et $v'(x) = e^x$,

$$\forall x \in]0, +\infty[, f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{e^x - 1 - x \times e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{e^x(1 - x) - 1}{(e^x - 1)^2}$$

b. Montrer que $\forall x \in]0, +\infty[, f''(x) = \frac{e^x}{(e^x - 1)^3}(xe^x - 2e^x + x + 2)$

1,5 points

De même, pour $x > 0$, en posant $a(x) = e^x(1 - x) - 1$ et $b(x) = (e^x - 1)^2$ on obtient $a'(x) = e^x - e^x - xe^x = -xe^x$ et $b'(x) = 2e^x(e^x - 1)$ et donc

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-xe^x(e^x - 1)^2 - (e^x(1 - x) - 1)2e^x(e^x - 1)}{(e^x - 1)^4} \\ &= \frac{e^x(e^x - 1)[-x(e^x - 1) - (e^x(1 - x) - 1)2]}{(e^x - 1)^4} \\ &= \frac{e^x[-xe^x + x - (2e^x - 2xe^x - 2)]}{(e^x - 1)^3} = \frac{e^x[-xe^x + x - (2e^x - 2xe^x - 2)]}{(e^x - 1)^3} \\ &= \frac{e^x(xe^x + x - 2e^x + 2)}{(e^x - 1)^3} = \frac{e^x}{(e^x - 1)^3}(xe^x - 2e^x + x + 2) \text{ comme attendu} \end{aligned}$$

c. Etudier les variations de la fonction $g : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = xe^x - 2e^x + x + 2$

En déduire que $\forall x \in]0, +\infty[, f''(x) > 0$, que peut-on en déduire sur f ?

2 points

g est dérivable et $\forall x \in [0, +\infty[, g'(x) = e^x + xe^x - 2e^x + 1 = xe^x - e^x + 1 = e^x(x - 1) + 1$
le signe de g' ne peut être obtenu d'emblée, donc on dérive à nouveau pour connaître les variations de $g' : \forall x \in [0, +\infty[, g''(x) = e^x + xe^x - e^x = xe^x$

donc $\forall x \in [0, +\infty[, g''(x) > 0$, donc g' est strictement croissante

or $g'(0) = e^0(0 - 1) + 1 = 0$ donc $\forall x \in]0, +\infty[, g'(x) > 0$ donc g' est strictement positive sauf en un nombre fini de points, donc g est strictement croissante, or $g(0) = 0e^0 - 2e^0 + 0 + 2 = 0$ donc $\forall x \in]0, +\infty[, g(x) > 0$ et de fait $\forall x \in]0, +\infty[, f''(x) > 0$ (car $e^x - 1$ positif si $x > 0$)
on peut en déduire que f est convexe

d. Dresser le tableau de variations de f

2 points

f' est donc strictement croissante, de plus, pour $x \geq 1, 1 - x \leq 0$ donc $e^x(1 - x) \leq 0$ et donc $e^x(1 - x) - 1 \leq -1$, de fait $f'(x) < 0$

et comme f' est croissante c'est également le cas ($f'(x) < 0$) pour $x < 1$

donc $\forall x \in]0, +\infty[, f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante.

Nota bene : on aurait aussi pu étudier la limite de f' en $+\infty$ (en factorisant par les termes dominants), on trouverait 0 ce qui montre également que f' est négative (car croissante)...
ou remarquer que $f' = -g'/(\dots)^2$ donc < 0

donc f est strictement décroissante, reste à étudier ses limites :

en 0, on reconnaît l'inverse du taux d'accroissement d'exponentielle en 0 : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

donc par inversion $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{e^x - 1} = 1$ i.e. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ et en $+\infty$, il s'agit presque d'une croissance comparée :

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1} = \frac{x}{e^x(1 - e^{-x})}$$

or par croissance comparée $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ et de plus
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - e^{-x} = 1$ donc par produit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$
on peut donc dresser le tableau de variations

x	0	$+\infty$
f	1	0

2. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$

a. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.

1 point

Par récurrence évidemment ! On définit pour $n \in \mathbb{N}, P(n) : u_n > 0$ (ce qui est nécessaire pour appliquer f définie sur $]0, +\infty[$)

Initialisation : $u_0 = 1$ donc $u_0 \in]0, +\infty[$, donc $P(0)$ est vraie

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $P(n)$ est vraie

par hypothèse $u_n \in]0, +\infty[$

or $x > 0 \Rightarrow e^x > 0$ (stricte croissance de l'exponentielle) $\Rightarrow e^x - 1 > 0$ et donc $f(x) = \frac{x}{e^x - 1} > 0$ par quotient de termes positifs

donc $f(u_n) > 0$ donc $P(n+1)$ est vraie, d'où l'hérédité

donc par théorème de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ est vraie, i.e. $u_n \in]0, +\infty[$

b. Montrer que $\forall x \in]0, +\infty[, |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ et $0 \leq f(x) \leq 1$

2,5 points

(on admettra que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -\frac{1}{2}$)

D'après la question 1.d, f' est strictement croissante et de plus continue, donc d'après le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\left] \lim_{x \rightarrow 0} f'(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) \right[= \left] -\frac{1}{2}, 0 \right[$ en effet $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ est donnée par l'énoncé et

$$f'(x) = \frac{e^x(1-x) - 1}{(e^x - 1)^2} = \frac{e^x(1-x) - 1}{e^{2x} - 2e^x + 1} = \frac{xe^x}{e^{2x}} \times \frac{-1 + \frac{1}{x} - \frac{e^{-x}}{x}}{1 - 2e^{-x} + e^{-2x}}$$

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$ car $\frac{xe^x}{e^{2x}} = \frac{x}{e^x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ par croissances comparées

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = 0$ (par limites de références)

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{x} = 0$ (par quotient) d'où le résultat par opérations

et en particulier $\forall x \in]0, +\infty[, -\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq 0$ donc $\frac{1}{2} \geq -f'(x) \geq 0$

i.e. $\frac{1}{2} \geq |f'(x)| \geq 0$ ($|f'(x)| = -f'(x)$)

De même f est strictement décroissante et de plus continue, elle réalise donc une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \right[=]0, 1[$, et en particulier $\forall x \in]0, +\infty[, 0 \leq f(x) \leq 1$

c. Résoudre l'équation $f(x) = x$

1 point

Soit $x \in]0, +\infty[$, alors par définition de f :

$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{x}{e^x - 1} = x \Leftrightarrow \frac{1}{e^x - 1} = 1 \text{ (car } x \neq 0) \Leftrightarrow e^x - 1 = 1 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln(2)$$

d. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \ln(2)| \leq \frac{1}{2} |u_n - \ln(2)|$ puis que $|u_n - \ln(2)| \leq \frac{1}{2^n}$ 2,5 points

D'après 3.a., $\forall x \in]0, +\infty[, |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$, donc avec $n \in \mathbb{N}$, on peut appliquer l'inégalité des accroissements finis, en prenant $a = \ln(2)$ et $b = u_n$ qui sont bien des éléments de $]0, +\infty[$ ($2 > 1 \Rightarrow \ln(2) > 0$ par stricte croissance de $\ln$ et d'après 2.a) pour u_n

donc $|f(u_n) - f(\ln(2))| \leq \frac{1}{2} |u_n - \ln(2)|$ i.e. $|u_{n+1} - \ln(2)| \leq \frac{1}{2} |u_n - \ln(2)|$
car $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(\ln(2)) = \ln(2)$

On procède à nouveau par récurrence pour la deuxième inégalité :

pour $n \in \mathbb{N}$, on définit : $Q(n) : |u_n - \ln(2)| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Initialisation : $Q(0)$ est vraie $\Leftrightarrow |u_0 - \ln(2)| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 \Leftrightarrow |1 - \ln(2)| \leq 1$

ce qui est vrai car $\ln(2) \in [0, 1]$, donc $Q(0)$ est vraie

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $Q(n)$ est vraie

d'après le résultat que nous venons de démontrer, $|u_{n+1} - \ln(2)| \leq \frac{1}{2} |u_n - \ln(2)|$

or par hypothèse $|u_n - \ln(2)| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ donc $\frac{1}{2} |u_n - \ln(2)| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

et donc $|u_{n+1} - \ln(2)| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ i.e. $Q(n+1)$ est vraie, d'où l'hérédité

donc par théorème de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, Q(n)$ est vraie.

- e. Conclure quant à la convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

1 point

$\frac{1}{2^n} \rightarrow 0$ (car $2^n \rightarrow \infty$: suite géométrique de raison strictement plus grande que 1)
donc par théorème des gendarmes, $|u_n - \ln(2)| \rightarrow 0$ ce qui équivaut à $u_n \rightarrow \ln(2)$

- f. Avec Python et en utilisant les résultats précédents, écrire un programme qui renvoie une valeur approchée de $\ln(2)$ à 10^{-5} près.

1,5 points

D'après la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \ln(2)| \leq \frac{1}{2^n}$ donc dès lors que $\frac{1}{2^n} \leq 10^{-5}$,
on aura
le résultat escompté (l'écart entre u_n et $\ln(2)$ sera inférieur à 10^{-5})

Donc avec Python, tant que le seuil de 10^{-5} n'est pas atteint, on va calculer de manière itérative les valeurs
de $\frac{1}{2^n}$, en calculant au passage les valeurs de u_n

On trouve 0,69315 comme valeur approchée avec u_{17}

```
import numpy as np
u=1
n=0
while 1/2**n>10**(-5) :
    n=n+1
    u=u/(np.exp(u)-1)
print(u, 'est une valeur approchée
de alpha a 0,00001 près')
```

Exercice 2

7 points

On s'intéresse à l'équation différentielle

$$\mathcal{E} : y'' - 4y' + 3y = t^2$$

1. Résoudre l'équation différentielle homogène associée.

1 point

Pour résoudre l'équation homogène linéaire du second ordre $y'' - 4y' + 3y = 0$, on commence
par déterminer les racines du trinôme $x^2 - 4x + 3$

or de manière évidente, 1 est une racine, de fait l'autre racine est 3

donc les solutions sont, par propriété, les fonctions $t \mapsto \lambda e^t + \mu e^{3t}$ où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

2. Déterminer une solution particulière de $\mathcal{E}$ parmi les fonctions de $\mathbb{R}_2[t]$

2 points

On cherche un polynôme de degré 2 (ou moins) solution, on définit donc la fonction $P(t)$ par
 $P(t) = at^2 + bt + c$ pour $t \in \mathbb{R}$, ce qui entraîne $P'(t) = 2at + b$ et $P''(t) = 2a$

donc P est solution de $y'' - 4y' + 3y = t^2 \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, P''(t) - 4P'(t) + 3P(t) = t^2$

$\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, 2a - 4(2at + b) + 3(at^2 + bt + c) = t^2 \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, 3at^2 + (3b - 8a)t + 2a - 4b + 3c = t^2$

donc par identification $3a = 1$ et donc $a = \frac{1}{3}$ puis $3b - 8a = 0$ donc $3b = \frac{8}{3}$ et donc $b = \frac{8}{9}$

et enfin $2a - 4b + 3c = 0$ donc $3c = -2a + 4b = -\frac{2}{3} + \frac{32}{9} = -\frac{6}{9} + \frac{32}{9} = \frac{26}{9}$ et donc $c = \frac{26}{27}$

donc le polynôme défini par $P(t) = \frac{1}{3}t^2 + \frac{8}{9}t + \frac{26}{27}$ est une solution particulière de $\mathcal{E}$

3. Déterminer l'ensemble des solutions de $\mathcal{E}$

0,5 point

l'ensemble des solutions est alors constitué des fonctions qui sont la somme de la solution particulière trouvée et d'une fonction solution de l'équation homogène, de fait :

$$\mathcal{S} = \left\{ t \mapsto \frac{1}{3}t^2 + \frac{8}{9}t + \frac{26}{27} + \lambda e^t + \mu e^{3t}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

4. L'équation $\mathcal{E}$ admet-elle une situation d'équilibre ?

1,5 points

On peut facilement voir que l'équation n'admet pas de situation d'équilibre car il n'y a pas de fonction constante solution.

En effet si on pose $f(x) = k$ une fonction constante ($k \in \mathbb{R}$)

alors f solution $\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, f''(t) - 4f'(t) + 3f(t) = t^2 \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, 3f(t) = t^2 \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \frac{1}{3}t^2$

car on a alors f constante $\Rightarrow f' = 0$ et $f'' = 0$

or il est impossible qu'une fonction constante vaille $\frac{1}{3}t^2$ (qui n'est pas constant sur $\mathbb{R}$)

Option 2 : on peut aussi remarquer que toutes les solutions ont une limite infinie quand t tend vers $+\infty$ ($+\infty$ ou $-\infty$ selon les valeurs de λ et μ)

or une situation d'équilibre a une limite finie (car c'est une fonction constante).

5. Déterminer la solution de $\mathcal{E}$ vérifiant $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$

2 points

On reprend le résultat de la question 3., une solution de $\mathcal{E}$ s'écrit $y(t) = \frac{1}{3}t^2 + \frac{8}{9}t + \frac{26}{27} + \lambda e^t + \mu e^{3t}$

où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ donc $y'(t) = \frac{2}{3}t + \frac{8}{9} + \lambda e^t + 3\mu e^{3t}$

donc $y(t) = 0 \Rightarrow \frac{26}{27} + \lambda + \mu = 0$ et $y'(t) = 0 \Rightarrow \frac{8}{9} + \lambda + 3\mu = 0$

nous avons donc à résoudre le système

$$\begin{aligned} \begin{cases} \lambda + \mu &= -\frac{26}{27} \\ \lambda + 3\mu &= -\frac{8}{9} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu &= -\frac{26}{27} \\ 2\mu &= -\frac{8}{9} + \frac{26}{27} \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda &= -\frac{26}{27} - \mu \\ 2\mu &= -\frac{26}{27} + \frac{26}{27} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda &= -\frac{26}{27} - \mu \\ 2\mu &= \frac{2}{27} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda &= -\frac{26}{27} - \frac{1}{27} = -1 \\ \mu &= \frac{1}{27} \end{cases} \end{aligned}$$

donc l'unique solution de $\mathcal{E}$ vérifiant ces conditions est $t \mapsto y(t) = \frac{1}{3}t^2 + \frac{8}{9}t + \frac{26}{27} - e^t + \frac{1}{27}e^{3t}$