

Devoir à faire en binôme.

Exercice 1

Soit f l'application : $]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$

1.
 - a. Calculer $f'(x)$
 - b. Montrer que $\forall x \in]0, +\infty[, f''(x) = \frac{e^x}{(e^x - 1)^3}(xe^x - 2e^x + x + 2)$
 - c. Etudier les variations de la fonction $g :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = xe^x - 2e^x + x + 2$
En déduire que $\forall x \in]0, +\infty[, f''(x) > 0$, que peut-on en déduire sur f ?
 - d. Dresser le tableau de variations de f
2. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$
 - a. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.
 - b. Montrer que $\forall x \in]0, +\infty[, |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ et $0 \leq f(x) \leq 1$ (on admettra que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -\frac{1}{2}$)
 - c. Résoudre l'équation $f(x) = x$
 - d. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \ln(2)| \leq \frac{1}{2}|u_n - \ln(2)|$ puis que $|u_n - \ln(2)| \leq \frac{1}{2^n}$
 - e. Conclure quant à la convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$
 - f. Avec Python et en utilisant les résultats précédents, écrire un programme qui renvoie une valeur approchée de $\ln(2)$ à 10^{-5} près.

Exercice 2

On s'intéresse à l'équation différentielle

$$\mathcal{E} : y'' - 4y' + 3y = t^2$$

1. Résoudre l'équation différentielle homogène associée.
2. Déterminer une solution particulière de $\mathcal{E}$ parmi les fonctions de $\mathbb{R}_2[t]$
3. Déterminer l'ensemble des solutions de $\mathcal{E}$
4. L'équation $\mathcal{E}$ admet-elle une situation d'équilibre?
5. Déterminer la solution de $\mathcal{E}$ vérifiant $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$