Concours blanc

Mathématiques

4 juin 2025

Durée : 4 heures
Le devoir comporte quatre exercices et un problème
Calculatrices non autorisées

- Les exercices peuvent être traités dans l'ordre souhaité.
- De nombreuses questions sont indépendantes, les résultats des questions non traitées peuvent bien sûr être admis.

Exercice 1

1. On s'intéresse à l'équation différentielle $\mathscr{E}_1 : y'(t) = -3y(t) + 4e^{-3t}$

a. Donner les fonctions f définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation différentielle

$$y' = -3y$$

b. Montrer que la fonction $t \mapsto 4te^{-3t}$ est une solution de l'équation différentielle $\mathscr{E}_1$

c. Déterminer toutes les solutions de $\mathscr{E}_1$

d. Cette équation admet-elle une situation d'équilibre ?

2. On s'intéresse à l'équation différentielle $\mathscr{E}_2 : y'' + 5y' - 6y = 18$

a. Résoudre l'équation différentielle $\mathscr{E}_2$

b. Déterminer la solution de l'équation différentielle $\mathscr{E}_2$ vérifiant $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$

Exercice 2

Pour tout entier naturel n, on pose pour tout réel x de $[0;1]$, $g_n(x) = \ln(1 + e^{-nx})$ et $I_n = \int_0^1 g_n(x)dx$

1. **a.** Montrer que $\forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}, g_{n+1}(x) \leqslant g_n(x)$

b. En déduire que la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante.

c. Montrer que la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente.

2. **a.** A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout entier naturel n,

$$I_n = \ln\left(1 + e^{-n}\right) + n\int_0^1 \frac{xe^{-nx}}{1 + e^{-nx}}dx$$

b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant I_n \leqslant \ln\left(1 + e^{-n}\right) + n\int_0^1 xe^{-nx}dx$

c. Pour tout entier naturel n non nul, calculer $\int_0^1 xe^{-nx}dx$

d. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{e^{2x}+1}$

1. **a.** Démontrer que f est paire sur $\mathbb{R}$
   b. Justifier que f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, étudier ses variations et ses limites.
   c. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $\ell \in \mathbb{R}_+$
   d. Justifier que : $0 \leqslant \ell \leqslant \dfrac{1}{2}$
   Données numériques : $e^{\frac{1}{2}} \simeq 1,65$ et $e \simeq 2,72$
   e. Montrer que : $\forall x > 0, |f'(x)| \leqslant f(x)$ et en déduire que : $\forall x > 0, |f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$
   f. Vérifier que $f\left(\left[0, \dfrac{1}{2}\right]\right) \subset \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$
2. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$
   a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$
   b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|u_{n+1} - \ell| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \ell|$ puis que $|u_n - \ell| \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}}$
   c. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ
3. Informatique : avec Python,
   a. écrire une fonction `f` qui prend en entrée un réel x et qui calcule $f(x)$
   b. en utilisant la fonction `f` précédente, écrire une fonction `SuiteU` qui prend en entrée un entier positif n et qui calcule u_n
   c. en utilisant la fonction `SuiteU` précédente, écrire un programme qui permet d'obtenir une valeur approchée de ℓ à 10^{-6} près ?
4. Etude de convexité de f et représentation graphique.
   a. Démontrer que f est $\mathscr{C}^2$ et que $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = \dfrac{e^x(1-6e^{2x}+e^{4x})}{(1+e^{2x})^3}$
   b. Démontrer que le polynôme $P(x) = x^4 - 6x^2 + 1$ admet une unique racine sur $[1, +\infty[$, que l'on notera α
   c. En déduire le signe de f'' sur $\mathbb{R}_+$, puis déterminer la convexité et les éventuels points d'inflexions de f sur $\mathbb{R}_+$
   On pourra exprimer les résultats en fonction de α
   d. On note $\beta = \ln \alpha$, donner en fonction de β, l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse β
   Quelle est la particularité de cette tangente ?
   e. Sans calcul, déterminer la convexité et les éventuels points d'inflexions de f sur $\mathbb{R}_-$
   f. Représenter f graphiquement.
   Données numériques : $\beta \simeq 0,88 \quad f(\beta) \simeq 0,35 \quad$ et $\quad f'(\beta) = -\dfrac{1}{4}$
5. Avec Python,
   a. écrire un programme qui représente f sur l'intervalle de votre choix (on considèrera que la fonction `f` est déjà définie).
   b. écrire un programme qui permette, à l'aide de l'algorithme de dichotomie, de déterminer α avec une précision de 10^{-3}

Problème 1

Soit n un entier avec $n \geqslant 2$
On considère une urne contenant n boules noires et 2 boules blanches, toutes indiscernables.
Aline effectue des tirages successifs d'une boule sans remise dans l'urne jusqu'à obtenir une boule blanche.
Elle laisse alors la place à un deuxième joueur, Bob, qui effectue des tirages successifs d'une boule avec remise dans l'urne jusqu'à obtenir l'autre boule blanche.
On note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules noires tirées par Aline avant de tirer une boule blanche et on appelle Y la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules noires tirées par Bob avant de tirer la boule blanche (s'il ne reste plus de boule noire, on a donc $Y = 0$).

Par exemple, si $n = 9$ et que les tirages successifs ont donné une boule : « noire, blanche, noire, noire, noire, noire, blanche » alors :

- Aline a effectué deux tirages, elle a retiré une boule noire puis une boule blanche de l'urne ;
- l'urne contient maintenant 9 boules : 8 noires et une blanche ;
- Bob a effectué ensuite cinq tirages dans cette urne, il a pioché 4 boules noires qu'il a reposées dans l'urne apès chaque tirage puis il a pioché la boule blanche ;
- X vaut 1 et Y vaut 4

Pour $i \in \mathbb{N}^*$, on note B_i l'événement « au $i^{\text{ème}}$ tirage on a obtenu une boule blanche ».

Partie 1 - cas particulier où $n = 2$

On suppose donc ici que l'urne contient initialement 2 boules blanches et 2 boules noires.

1. Exprimer les événements $[X = 0], [X = 1], [X = 2]$ à l'aide des événements B_1, B_2, B_3
2. En déduire les probabilités des événements : $[X = 0], [X = 1], [X = 2]$
3. En déduire l'espérance et la variance de X
4. Montrer que la probabilité de l'événement $[Y = 0]$ est donnée par : $P(Y = 0) = \dfrac{1}{2}$
5. Pour tout entier i tel que $i \geqslant 1$, déterminer les probabilités suivantes :
$$P([X = 0] \cap [Y = i]), \quad P([X = 1] \cap [Y = i]), \quad P([X = 2] \cap [Y = i])$$
6. En déduire que pour $i \in \mathbb{N}^*, P(Y = i) = \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1}{2}\right)^i + \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{2}{3}\right)^i$
7. Que doit valoir $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} P(Y = i)$? Vérifier le résultat attendu.
8. Montrer que Y admet une espérance, et que $E(Y) = \dfrac{4}{3}$
9. On pose $Z = Y(Y - 1)$
   a. Déterminer $Z(\Omega)$
   b. Justifier que Z admet une espérance, et calculer $E(Z)$
10. En déduire que Y admet un moment d'ordre 2 et que $E(Y^2) = 6$
11. Calculer la variance de Y
12. Expliquer ce que réalise le programme suivant (on détaillera notamment le résultat de son exécution).

```python
import numpy.random as rd
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

x=rd.geometric(0.2,10000)
n=np.max(x)
y=np.zeros(n)

for i in range(0, 10000):
    j=x[i]
    y[j-1]=y[j-1]+1

y=y/10000

a=np.arange(1,n+1,1)
z=[(0.8)**i*0.2 for i in range (0,n)]
plt.bar(a,y,width=0.8,color='b')
plt.bar(a,z,width=0.5,color='r')
plt.show()
```

Partie 2 - cas général

On suppose ici que $n > 2$

1. Calculer $P(X = 0)$
2. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, exprimer l'événement $[X = k]$ à l'aide des événements B_i
3. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, montrer que $P(X = k) = \dfrac{2(n-k+1)}{(n+1)(n+2)}$
4. Cette formule est-elle encore valable pour $k = 0$?
5. **a.** Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(n-k)(n-k+1)$ grâce au changement d'indice $i = n - k$

   b. En déduire l'espérance $E(n - X)$ de la variable aléatoire $n - X$

   c. En déduire que $E(X) = \dfrac{n}{3}$

Partie 3 - cas particulier où Aline n'obtient pas de boule noire

Comme dans la partie précédente, $n > 2$
On suppose ici que $X = 0$, autrement dit que Aline obtient une boule blanche au premier tirage.
On note T la variable aléatoire définie par $T = Y + 1$

1. Combien de boules au total contient l'urne au moment où Bob commence à jouer ? Combien de boules blanches ?
2. Justifier que T suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.
3. Donner $E(T)$ et $V(T)$
4. En déduire $E(Y)$ et $V(Y)$

Exercice 4

Soit M la matrice définie par $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Soit N la matrice telle que $M = I_4 + N$

   a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer N^n

   b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, M^n = I_4 + nN + \dfrac{n(n-1)}{2}N^2$
2. On considère maintenant le graphe dont M est la matrice d'adjacence.

   a. Représenter ce graphe.

   b. En utilisant le critère de connexité d'un graphe à partir de sa matrice d'adjacence, déterminer si ce graphe est connexe.

   c. Ecrire un programme Python qui permet de visualiser le résultat de ce critère.

   d. Combien existe-t-il de chaine(s) de longueur 32 pour aller du sommet 2 au sommet 3 ?