

**Objectifs d'apprentissage** - A la fin de ce chapitre, je sais :

- **montrer** qu'un vecteur est (ou n'est pas) **une combinaison linéaire** d'une famille de vecteurs
- **démontrer** qu'un ensemble **est un sous-espace vectoriel**
- **démontrer** qu'une **famille de vecteurs** est **libre, génératrice ou une base**
- **déterminer** les caractéristiques d'une appli. linéaire **noyau, image, range, matrice associée**

Le concept qui préside à ce chapitre est la linéarité. Depuis le collège, on parle de fonctions linéaires, par exemple  $f(x) = 3x$ . En fait, deux propriétés définissent la linéarité (ici d'une fonction) :

- l'additivité :  $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ , ici c'est le cas car  $f(x_1 + x_2) = 3(x_1 + x_2) = 3x_1 + 3x_2 = f(x_1) + f(x_2)$
- la proportionnalité :  $f(\lambda x) = \lambda f(x)$  ici c'est le cas car  $f(\lambda x) = 3(\lambda x) = \lambda 3x = \lambda f(x)$

## 1 Espaces vectoriels

Définitions et propriétés	Exemples
<p><u>Définitions</u> : un <b>espace vectoriel</b> est un ensemble dont les éléments peuvent être additionnés entre eux ou multipliés par un nombre réel, le résultat de l'opération étant toujours un élément de l'ensemble.</p> <p>Autrement dit, <math>E</math> est un espace vectoriel si toute combinaison linéaire d'éléments de l'ensemble est toujours un élément de l'ensemble.</p> <p>Les éléments d'un espace vectoriel sont appelés <b>vecteurs</b>. Les coefficients réels (<math>\lambda</math>) sont appelés <b>scalaires</b>.</p>	<p>Les ensembles <math>\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \dots, \mathbb{R}^n</math> sont des espaces vectoriels. En effet (pour <math>\mathbb{R}^3</math>) avec <math>X = (x_1, x_2, x_3)</math> et <math>Y = (y_1, y_2, y_3)</math> alors <math>X + Y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)</math> <math>\lambda X = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)</math> (avec <math>\lambda \in \mathbb{R}</math>) <b>appartiennent à <math>\mathbb{R}^3</math></b></p> <p>de même, les ensembles des matrices colonnes <math>\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}), \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), \dots, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})</math> sont des espaces vectoriels</p> <p>Il en existe beaucoup d'autres : l'ensemble des fonctions paires est un espace vectoriel.</p>
<p><u>Définition</u> : avec <math>E</math> un espace vectoriel, lorsque <math>F \subset E</math> est un espace vectoriel, on dit que <math>F</math> est un <b>sous-espace vectoriel</b> de <math>E</math></p> <p><u>Propriété</u> : si <math>E</math> est un espace vectoriel, alors <math>F \subset E</math> est un sous-espace vectoriel de <math>E</math> si et seulement si :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>F</math> est non vide</li> <li>• <math>\forall (x, y) \in F^2, x + y \in F</math></li> <li>• <math>\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda x \in F</math></li> </ul>	<p><math>F = \{(x, 0), x \in \mathbb{R}\}</math> est un sous-espace vectoriel de <math>\mathbb{R}^2</math></p> <p>en effet, <b><math>F</math> est non vide car <math>(0, 0) \in F</math> et <math>\forall X, Y \in F, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \exists x, y \in \mathbb{R}, X = (x, 0), Y = (y, 0)</math> donc <math>\lambda X = (\lambda x, 0)</math> et <math>X + Y = (x + y, 0)</math> <b>appartiennent à <math>F</math></b></b></p>

LA méthode officielle pour montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel (sauf cas évident comme les Vect) : on montre en fait qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de quelque chose de plus gros.

1. on trouve l'ensemble plus gros
2. on précise que l'élément nul est dans l'ensemble (qui de fait est non vide)
3. on montre que pour tous  $x_1, x_2$  de l'ensemble et tout  $\lambda$  réel  $\lambda x_1$  et  $x_1 + x_2$  sont dans l'ensemble.

<p><u>Propriété</u> : l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène est un (sous-) espace vectoriel</p>	<p><math>(0, 0, 0)</math> est toujours solution d'un système linéaire homogène (donc l'ensemble des solutions est non vide) et par exemple pour <math>(x_1, y_1, z_1)</math> et <math>(x_2, y_2, z_2)</math> deux solutions du système <math display="block">\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}</math> alors <math>(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)</math> est solution du système, en effet <math>(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) = x_1 + y_1 + z_1 + x_2 + y_2 + z_2 = 0 + 0 = 0</math> et <math>(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2) = y_1 - z_1 + y_2 - z_2 = 0 + 0 = 0</math> de même <math>\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda(x_1, y_1, z_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)</math> est solution du système</p>
---	--

## 2 Familles de vecteurs : base, famille libre, famille génératrice

<p><u>Définition</u> : on dit que la famille de vecteurs <math>(u_1, u_2, \dots, u_p)</math> est une <b>base</b> d'un espace vectoriel <math>E</math> si tout vecteur de <math>E</math> se décompose de manière unique sous forme d'une combinaison linéaire de <math>(u_1, u_2, \dots, u_p)</math></p>	$\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ forment une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ car tout élément de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x - y) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
<p><u>Définition</u> : on dit que les vecteurs <math>(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)</math> forment la <b>base canonique</b> de <math>\mathbb{R}^3</math> car tout élément de <math>\mathbb{R}^3</math> s'écrit comme une unique combinaison linéaire de ces 3 vecteurs</p>	$(5, -2, 11)$ peut s'écrire $(5, -2, 11) = 5(1, 0, 0) - 2(0, 1, 0) + 11(0, 0, 1)$ <u>Remarque</u> : on définit de même les bases canoniques pour n'importe quel espace $\mathbb{R}^n$ ou $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$
<p><u>Propriété</u> : si un espace vectoriel admet une base de <math>p</math> vecteurs alors toute autre base a <math>p</math> vecteurs</p>	<p>Les exemples ci-dessus permettent d'affirmer que toute base de <math>\mathbb{R}^2</math> a 2 vecteurs, toute base de <math>\mathbb{R}^3</math> a 3 vecteurs.</p>
<p><u>Définition</u> : on dit que la famille de vecteurs <math>(u_1, u_2, \dots, u_p)</math> est une <b>famille génératrice</b> d'un espace vectoriel <math>E</math> si tout vecteur de <math>E</math> se décompose sous forme d'une combinaison linéaire de <math>(u_1, u_2, \dots, u_p)</math></p>	<p><u>Remarque</u> : une base est une famille génératrice.  <u>Exemple</u> : de fait <math>((1, 0), (0, 1))</math> est une famille génératrice de <math>\mathbb{R}^2</math>, mais <math>((1, 0), (0, 1), (7, -15))</math> l'est aussi.</p>
<p><u>Définition</u> : on dit que la famille de vecteurs <math>(u_1, u_2, \dots, u_p)</math> est <b>libre</b> d'un espace vectoriel <math>E</math> si <math>\forall (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p</math>,  <math>\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p = 0 \Rightarrow \forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \lambda_k = 0</math></p>	<p><u>Remarque</u> : autrement dit les vecteurs d'une famille libre ne peuvent pas être combinaison linéaire les uns des autres (« ils sont libres » car « ils ne sont pas liés aux autres »).</p>
<p><u>Propriété</u> : une famille de vecteurs est une base <math>\Leftrightarrow</math> la famille est libre et génératrice</p>	<p><u>Remarque</u> : cela illustre les deux volets de la base, tout vecteur admet une décomposition (génératrice) et cette décomposition est unique (libre).</p>
<p><u>Définition et propriété</u> : le <b>sous-espace vectoriel engendré</b> par une famille de vecteurs <math>(u_1, u_2, \dots, u_p)</math> est l'ensemble constitué de toutes les combinaisons linéaires de ces vecteurs. C'est un espace vectoriel que l'on note <math>\text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p)</math></p>	$\text{Vect}((1, 0), (0, 1)) = \{a(1, 0) + b(0, 1), a \text{ et } b \in \mathbb{R}\} = \{(a, b), a \text{ et } b \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$ $\text{Vect}((1, 1), (2, 2)) = \{a(1, 1) + b(2, 2), a \text{ et } b \in \mathbb{R}\} = \{(a + 2b)(1, 1), a \text{ et } b \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1, 1))$

La méthode officielle pour montrer qu'un vecteur est combinaison linéaire d'autres vecteurs, on écrit  $v = x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 + \dots$  (cf. exercices 2 et 3), puis on résout le système.

<p><u>Définition</u> : la <b>dimension</b> d'un espace vectoriel est le cardinal d'une de ses bases.</p>	$\mathbb{R}^2$ est de dimension 2, $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3 $\mathbb{R}^n$ est de dimension n
<p><u>Propriété</u> : une famille libre (respectivement génératrice) à <math>n</math> vecteurs d'un sous-espace vectoriel de dimension <math>n</math> est une base.</p>	<p><u>Remarque</u> : dans la pratique, on utilisera le plus souvent cette propriété pour démontrer qu'une famille est une base.</p>
<p><u>Définition</u> : le <b>rang</b> d'une famille de vecteurs est le maximum du cardinal de ses sous-familles libres.  <u>Propriété</u> : le rang de la famille <math>(u_1, u_2, \dots, u_p)</math> est égal à la dimension <math>\text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p)</math></p>	<p>Avec <math>X = (1, 2, -1)</math>, <math>Y = (-3, -1, -5)</math> et <math>Z = (-2, 1, -6)</math> alors <math>(X, Y, Z)</math> est de rang 2 puisque <math>(X, Y)</math> est libre et <math>X + Y = Z</math> et donc <math>\forall a, b, c</math> réels <math>aX + bY + cZ = aX + bY + c(X + Y) = (a + c)X + (b + c)Y</math> ce qui entraîne <math>\text{Vect}(X, Y, Z) = \text{Vect}(X, Y)</math></p>

<p><u>Propriété</u> : les sous-espaces vectoriels de <math>\mathbb{R}^2</math> sont de dimension</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• 0, c'est alors <math>\{0\}</math></li> <li>• 1, ce sont tous les Vect <math>u</math> où <math>u \neq (0, 0)</math></li> <li>• 2, c'est alors <math>\mathbb{R}^2</math></li> </ul>	<p><u>Remarque</u> : comme vu plus haut, dès lors qu'une famille de deux vecteurs de <math>\mathbb{R}^2</math> est libre, elle constitue une base de <math>\mathbb{R}^2</math></p> <p>Ce résultat se généralise à <math>\mathbb{R}^n</math> (une famille libre de <math>n</math> vecteurs de <math>\mathbb{R}^n</math> en est une base).</p>
---	--

### 3 Applications linéaires

Définitions et propriétés	Exemples
<p><u>Définition</u> : soit <math>E</math> et <math>F</math> des espaces vectoriels, une application de <math>E</math> dans <math>F</math> est dite <b>linéaire</b> si</p> $\forall (x, y) \in E^2 \text{ et } \forall \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} f(x + y) = f(x) + f(y) \\ f(\lambda x) = \lambda f(x) \end{cases}$ <p>que l'on peut aussi résumer en</p> $\forall (x, y) \in E^2 \text{ et } \forall \lambda \in \mathbb{R}, f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$	<p><math>f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2</math></p> $(x, y) \mapsto (x + y, 2x - y)$ <p>alors avec <math>X = (x, y), Y = (x', y')</math> et <math>\lambda \in \mathbb{R}</math>, on trouve</p> $f(\lambda X + Y) = f((\lambda x + x', \lambda y + y'))$ $= (\lambda x + x' + \lambda y + y', 2(\lambda x + x') - (\lambda y + y'))$ $= \dots \text{ puis on calcule } \lambda f(X) + f(Y) \text{ et on vérifie l'égalité}$ <p>Voir exercices 13.1, 13.2, 14 et 15</p>
<p><u>Définition</u> : le <b>noyau</b> d'une application linéaire est l'ensemble des antécédents de 0 par cette application on le note <math>\ker f</math> (avec <math>f</math> l'application).</p>	<p>soit <math>f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}</math></p> $(x, y) \mapsto x - y$ <p>alors <math>f(x, y) = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y</math></p> <p>donc <math>\ker f = \{(\alpha, \alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}</math></p>
<p><u>Propriété</u> : le noyau et l'image d'une application linéaire sont des (sous-) espaces vectoriels.</p> <p>En particulier <math>0 \in \ker f</math> et <math>0 \in \text{Im } f</math></p> <p>On note <math>\text{Im } f</math> l'image</p>	<p>avec l'exemple précédent, on en déduit que <math>\ker f = \{(\alpha, \alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}</math> et <math>\text{Im } f</math> sont des espaces vectoriels.</p> <p>pour <math>\text{Im } f</math>, ce n'est pas un scoop car <math>\text{Im } f = \mathbb{R}</math></p>
<p><u>Propriété</u> : pour toute matrice <math>M</math> de <math>\mathcal{M}_n(\mathbb{R})</math>, l'application <math>\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})</math> est une application linéaire.</p> $X \mapsto MX$	<p>Avec <math>M = \begin{pmatrix} -4 &amp; 7 \\ -1 &amp; 2 \end{pmatrix}</math> et <math>X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}</math> alors</p> $X \mapsto MX = \begin{pmatrix} -4x + 7y \\ -x + 2y \end{pmatrix}$ est une application linéaire
<p><u>Définition</u> : le <b>rang d'une matrice</b> <math>A</math> est le rang de la famille des vecteurs colonnes de la matrice <math>A</math>, on le note <math>\text{rg}(A)</math></p>	<p><math>\text{rg} \left( \begin{pmatrix} -4 &amp; 7 \\ -1 &amp; 2 \end{pmatrix} \right) = 2</math> car <math>\left( \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} \right)</math> forment une famille libre</p>
<p><u>Propriété</u> : pour une matrice <math>A</math>, <math>\text{rg}(A) = \text{rg}({}^t A)</math></p>	<p>On peut donc étudier indifféremment le rang des vecteurs colonnes ou celui des vecteurs lignes</p>
<p><u>Théorème du rang</u> : soit <math>f</math> l'application linéaire définie par la matrice <math>M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})</math></p> <p>i.e. <math>f : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})</math></p> $X \mapsto MX$ <p>alors <math>\dim(\ker f) + \text{rg}(M) = n</math></p>	<p>avec l'exemple précédent,</p> $\dim(\ker f) = 2 - 2 = 0 \text{ car } \text{rg}(M) = 2$ <p>donc <math>\ker f = \{0\}</math> i.e. le noyau est réduit à l'élément nul.</p>