Corrigé

total sur 6 points

Exercice 1

6 points

Soit f l'application définie par $f : \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 + x_3 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la matrice A associée à cette application f 0,5 point

$$f \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 + x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0x_1 + x_2 + 0x_3 \\ x_1 + 0x_2 + x_3 \\ 0x_1 + x_2 + 0x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ donc } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Justifier que f est une application linéaire de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ 1 point

D'après la question précédente, $\forall X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), f(X) = AX$
 donc avec $Y \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), f(X + Y) = A(X + Y) = AX + AY = f(X) + f(Y)$
 et pour $\lambda \in \mathbb{R}, f(\lambda X) = A(\lambda X) = \lambda AX = \lambda f(X)$ donc f est bien linéaire

3. Montrer que $\ker f = \text{Vect}(u_1)$ où u_1 est un vecteur de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ que l'on explicitera. 1,5 points

Par définition $X \in \ker f \Leftrightarrow f(X) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 + x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = -x_1 \end{cases}$$

$$\text{donc } \ker f = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ -x_1 \end{pmatrix}, x_1 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, x_1 \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

donc $\ker f = \text{Vect}(u_1)$

4. Déterminer $\text{Im } f$ (on en donnera une base (u_2, u_3)) 1,5 points

$$\text{Par définition } \text{Im } f = \left\{ \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 + x_3 \\ x_2 \end{pmatrix}, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 + x_3 \\ 0 \end{pmatrix}, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

$$\text{donc } \text{Im } f = \left\{ x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (x_1 + x_3) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect}(u_2, u_3)$$

(u_1, u_2) est donc une famille génératrice de $\text{Im } f$ et c'est une famille libre puisque u_1 et u_2 ne sont pas proportionnels donc (u_1, u_2) est une base de $\text{Im } f$

5. Montrer que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ 1,5 points

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0$

$$\text{alors } \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ i.e. } \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ donc } \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

de fait $\lambda_3 = 0$ et avec $L_1 + L_2$ on trouve $2\lambda_2 = 0$ donc $\lambda_2 = 0$ et de fait $\lambda_1 = 0$

donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ donc la famille (u_1, u_2, u_3) est libre

(u_1, u_2, u_3) est donc une famille libre à 3 éléments dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ qui est de dimension 3, c'est donc une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$