ECG 1 - maths appliquées **Devoir en classe** 18 juin 2025

Corrigé *Total sur 10 points (1 point pour la rédaction)*

Exercice 1 *9 points*

Soit f l'application définie par $f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2+x_3 \\ x_2+x_3 \end{pmatrix} \end{array}$

1. Déterminer la matrice A associée à cette application f et démontrer que f est une application linéaire de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ *1,5 points*

Avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, on trouve $AX = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2+x_3 \\ x_2+x_3 \end{pmatrix} = f(X)$
donc A est la matrice associée à cette application linéaire. La propriété du cours permet alors de dire que f est linéaire, mais on nous « demande » ici de le démontrer.
alors $\forall X, Y \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}), f(X+Y) = A(X+Y) = AX + AY = f(X) + f(Y)$ (d'après les règles sur les opérations matricielles), et pour $\lambda \in \mathbb{R}, f(\lambda X) = A(\lambda X) = \lambda AX = \lambda f(X)$ (de même) donc f est bien linéaire

2. Montrer que $\ker f = \mathrm{Vect}(U_1)$, où U_1 est un vecteur de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ *1,5 points*

Avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $X \in \ker f \Leftrightarrow f(X) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & 0 \\ x_2+x_3 & = & 0 \\ x_2+x_3 & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & 0 \\ & & \\ x_2 & = & -x_3 \end{array} \right.$
donc $\ker f = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}(U_1)$ avec $U_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (ce n'est pas demandé ici, mais au passage U_1 est une base de $\ker f$ car c'en est une famille génératrice, par définition du Vect, et c'est une famille libre, car composée d'un seul vecteur, non nul).

3. Déterminer $\mathrm{Im}\, f$, on en donnera une base. *2 points*

$\mathrm{Im}\, f = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2+x_3 \\ x_2+x_3 \end{pmatrix}, (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \right\}$
$\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ car les deuxième et troisième vecteurs sont identiques,
de plus $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}\, f$ (par définition du Vect) et libre car constituée de deux vecteurs non proportionnels, c'est donc une base de $\mathrm{Im}\, f$

4. Montrer que $E_2(f) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}), f(X) = 2X\}$ est un espace vectoriel et en donner une base U_2 *2 points*

Avec avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $X \in E_1(f) \Leftrightarrow f(X) = X \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & 2x_1 \\ x_2+x_3 & = & 2x_2 \\ x_2+x_3 & = & 2x_3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & 0 \\ & & \\ x_2 & = & x_3 \end{array} \right.$
donc $E_2(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}, x_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x_2 \in \mathbb{R}, \right\} = \mathrm{Vect}\,(U_2)$ avec $U_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
donc $E_2(f)$ est un espace vectoriel (car c'est un ensemble engendré par un vecteur) et U_2 est une base de $E_2(f)$ car elle est génératrice (puisque $E_2(f) = \mathrm{Vect}(U_2)$) et libre car constituée d'un seul vecteur non nul.

5. On note $U_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, déterminer $f(U_3)$ en fonction de U_3 *0,5 point*

Avec la définition de f ou avec la matrice, on trouve $f(U_3) = U_3$ (i.e. $AU_3 = U_3$)

6. Montrer que (U_1, U_2, U_3) est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ *1,5 points*

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tels que
$\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \lambda_3 U_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ alors $\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_3 & = & 0 \\ -\lambda_1+\lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_1+\lambda_2 & = & 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -\lambda_1+\lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_1+\lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcll} \lambda_1 & = & 0 & L_2 - L_1 \\ \lambda_2 & = & 0 & L_1 + L_2 \\ \lambda_3 & = & 0 & \end{array} \right.$
donc (U_1, U_2, U_3) est une famille libre de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ à trois éléments et $\dim \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) = 3$, c'est donc une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$