

Soit f l'application définie par $f : \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 + x_3 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la matrice A associée à cette application f et démontrer que f est une application linéaire de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$
2. Montrer que $\ker f = \text{Vect}(U_1)$, où U_1 est un vecteur de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$
3. Déterminer $\text{Im } f$, on en donnera une base.
4. Montrer que $E_2(f) = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), f(X) = 2X\}$ est un espace vectoriel et en donner une base U_2
5. On note $U_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, déterminer $f(U_3)$ en fonction de U_3
6. Montrer que (U_1, U_2, U_3) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$