Chapitre 1

Rappels sur les fonctions - Fonctions de références

Table des matières

1 Généralités sur les fonctions

1.1 Notion de fonction

Définition 1. (Fonction d'une variable réelle)
On dit que f est une fonction numérique d'une variable réelle s'il existe une partie $\mathscr{D}_f$ (appelé domaine de définition de f) de $\mathbb{R}$ telle que à tout élément x de $\mathscr{D}_f$, f associe un unique réel, noté $f(x)$, appelé image de x par f.
On note :

$f : \mathscr{D}_f \to \mathbb{R}$ (Se lit "f, qui va de $\mathscr{D}_f$ dans $\mathbb{R}$")

$f : x \mapsto f(x)$ (Se lit "f, qui à x associe $f(x)$.")

Attention ! Ne pas confondre f et $f(x)$: f **est une fonction alors que** $f(x)$ **est un nombre.**

Exemple 1.

- La fonction carré va de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
- Le domaine de définition de la fonction inverse est $\mathbb{R}^*$.

Remarque. On peut définir une fonction sans préciser son domaine de définition. Celà sous-entend que ce domaine est le plus grand possible

Exemple 2. Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{2x^2 - 5x - 6}$. Déterminer D_f.

Remarque. On peut aussi restreindre artificiellement le domaine d'une fonction.

Exemple 3. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g(x) = x^2$. Dresser le tableau de variations de g.

Définition 2. (Antécédent(s) d'un réel)
Soit b un réel et f une fonction.

On appelle antécédent de b par f tout réel $a \in \mathscr{D}_f$ tel que $f(a) = b$.

Définition 3. (Courbe d'une fonction)
Soit f une fonction. Dans un repère, on appelle courbe de f (ou graphe de f) l'ensemble des points de coordonnées $(x, f(x))$ avec $x \in \mathscr{D}_f$. Si on note $\mathcal{C}_f$ cette courbe, on a donc :

$$\mathcal{C}_f = \left\{ \Big(x, f(x)\Big) \Big| x \in \mathscr{D}_f \right\}.$$

1.2 Variations d'une fonction

Définition 4. (Monotonie d'une fonction sur un intervalle)
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On dit que :

- f est décroissante sur I lorsque : $\forall (x_1, x_2) \in I^2,\ x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$.
- f est strictement décroissante sur I lorsque : $\forall (x_1, x_2) \in I^2,\ x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$.
- f est croissante sur I lorsque : $\forall (x_1, x_2) \in I^2,\ x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$.
- f est strictement croissante sur I lorsque : $\forall (x_1, x_2) \in I^2,\ x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$.

Exemple 4. On note f la fonction dont la courbe $\mathcal{C}$ est donnée ci-dessous :

Donner un (ou plusieurs) intervalle(s) sur lesquels :

1. f est strictement croissante.
2. f est strictement décroissante.
3. f est croissante mais pas strictement croissante.
4. f n'est ni croissante ni décroissante.
5. f est croissante et décroissante.

Remarque.
Les quatre définitions ci-dessus utilisent des **implications**. Leur réciproque sont fausses si f est seulement croissante ou décroissante :
Si $f(x_1) \leq f(x_2)$ est que f est seulement croissante (et pas strictement), on ne peut rien dire de x_1 et de x_2.

Par contre en cas de stricte monotonie, la réciproque est vraie. C'est l'objet de la proposition suivante.

Proposition 1. (Comparaison des antécédents dans le cas d'une fonction strictement monotone) (admis)
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soient $x_1, x_2 \in I$.

$$\text{Si } \begin{cases} f \text{ est } \textbf{strictement} \text{ croissante sur } I \\ \text{et} \\ f(x_1) < f(x_2) \end{cases} \qquad \text{alors } x_1 < x_2$$

$$\text{Si } \begin{cases} f \text{ est } \textbf{strictement} \text{ décroissante sur } I \\ \text{et} \\ f(x_1) < f(x_2) \end{cases} \qquad \text{alors } x_1 > x_2$$

2 Fonctions de référence

2.1 Fonctions "puissances entières"

2.1.1 Fonction Carré

Cette fonction doit vous être familière et nous ne revenons pas dessus ni sur les identités remarquables.

Il faut bien faire attention à l'utilisation d'un carré dans des égalités ou des inégalités :

Proposition 2. (Carré et égalité/Inégalités) (admis)
Si a et b sont deux réels quelconques :

- Si $a = b$, alors $a^2 = b^2$.
- Si $a^2 = b^2$, alors $a = b$ ou $a = -b$.
- Si $a \leq b$, alors on ne peut rien dire de a^2 et b^2
- Si $a \leq b$ et a et b de même signe, alors $a^2 \leq b^2$.
- Si $a^2 \leq b^2$, alors on ne peut rien dire de a et b
- Si $a^2 \leq b^2$ et a et b de même signe, alors $a \leq b$.

2.1.2 Fonction cube et fonctions "puissance n"

Voir les cartes d'identités des fonctions. On retiendra les inégalités suivantes :

Proposition 3. (Classement des puissances de x) (admis)
Soit $x \in \mathbb{R}$ et n, m deux entiers tels que $n < m$. On a :

- Si $x \in]0, 1[$, $0 < x^m < x^n < 1$.
- Si $x > 1$, $\quad 1 < x^n < x^m$.

Exemple 5. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Classer x, x^2, x^3 et x^4 selon la valeur de x.

2.2 Fonctions polynômes et fonctions rationnelles

Définition 5. (Polynôme de degré $n \geq 0$)
Soit n un entier naturel et $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des réels **avec** $a_n \neq 0$.
La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

est un **polynôme de degré** n

Exemple 6.

- $x \mapsto 4x^3 + 2x^2 - x + 1$ est un polynôme de degré 3
- $x \mapsto x^{10} - 1$ est un polynôme de degré 10
- $x \mapsto 2x + 5$ est un polynôme de degré 1
- $x \mapsto 2$ est un polynôme de degré 0

Définition 6. (Fonction rationnelle)
On appelle **fonction rationnelle** toute fonction qui peut s'écrire comme quotient de deux polynômes.

Exemple 7. Les fonctions ci-dessous sont des fonctions rationnelles.

- $x \mapsto \dfrac{2x+5}{3x-1}$.
- $x \mapsto \dfrac{1}{4x^2 - x + 1}$.
- $x \mapsto \dfrac{3x^5 + 3x^2 - 1}{4x^6 - x^4 + x}$.

Proposition 4. (Limite d'un polynôme en $\pm\infty$.) (admis)
La limite en $+\infty$ ou en $-\infty$ d'un polynôme est celle de son terme de plus haut degré.
Autrement dit :
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, a_1, \ldots, a_n$, des réels **avec** $a_n \neq 0$.

$$\lim_{x \to +\infty} a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \lim_{x \to +\infty} a_n x^n$$
$$\lim_{x \to -\infty} a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \lim_{x \to -\infty} a_n x^n$$

Exemple 8.

1. $\lim_{x\to+\infty} 3x^5 - 2x^4 + 3x^3 - x^2 + x - 3 = \lim_{x\to+\infty} 3x^5 = +\infty.$
2. $\lim_{x\to-\infty} 4x - 3x^3 = \lim_{x\to-\infty} -3x^3 = +\infty.$
3. $\lim_{x\to+\infty} 3x^5 - 2x^6 = \lim_{x\to+\infty} -2x^6 = -\infty.$

Proposition 5. (Limite d'une fonction rationnelle en $\pm\infty$.) (admis)
La limite en $+\infty$ ou en $-\infty$ d'une fonction rationnelle est celle du quotient des termes de plus haut degré.
Autrement dit :
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, a_1, \dots, a_n$, des réels **avec** $a_n \neq 0$.
et $m \in \mathbb{N}$ et $b_0, b_1, \dots, b_m$, des réels **avec** $b_m \neq 0$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \lim_{x\to-\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

Remarque. On obtient ensuite la limite en simplifiant la fraction $\dfrac{a_n x^n}{b_m x^m}$ obtenue.

Exemple 9.

1. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{2x+5}{3x-1} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{3x} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{3}.$
2. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{1}{4x^2 - x + 1} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{4x^2} = 0.$
3. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{3x^5 + 3x^2 - 1}{4x^6 - x^4 + x} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{3x^5}{4x^6} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{3}{4x} = 0.$
4. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{3x^9 + 3x^2 - 1}{4x^6 - x^4 + x} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{3x^9}{4x^6} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{3x^3}{4} = -\infty.$

2.3 Fonctions racines n-ieme

Voir les cartes d'identités des fonctions.

Exemple 10. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Classer les valeurs $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$, x et x^2 selon les valeurs de x

2.4 Fonction exponentielle et logarithme

Pour un rappel sur ces fonctions de référence, voir les cartes d'identités de fonctions.

2.5 Fonctions trigonométriques

2.5.1 Fonctions Sinus et Cosinus

Pour un rappel sur les fonction sin et cos, voir les cartes d'identités de fonctions.

2.5.2 Fonction Tangente

Définition 7. (Fonction tangente)
On appelle fonction tangente la fonction $\tan$ définie par :

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Proposition 6. (Domaine de définition) (admis)
La fonction $\tan$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \middle| k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Proposition 7. (Parité et périodicité) (admis)
La fonction $\tan$ est impaire et π-périodique.

Proposition 8. (Dérivée) (admis)
La fonction $\tan$ est dérivable sur son domaine de définition et on a, pour tout $x \in \mathcal{D}_{\tan}$:

$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

On pourra aller voir les cartes d'identités des fonctions de référence pour la courbe, les limites et les valeurs particulières de la fonction $\tan$ (qui sont à connaître par cœur).

2.6 Fonction Valeur Absolue

Voir les cartes d'identités des fonctions.

2.7 Fonction Partie Entière

Voir les cartes d'identités des fonctions.

3 Continuité et dérivabilité

3.1 Continuité, théorème de la bijection

3.1.1 Fonction continue sur un intervalle

Nous donnerons dans le chapitre dédié aux limites et à la continuité la définition précise de la continuité d'une fonction en un point et sur un intervalle. Pour l'instant, nous nous contenterons de l'approche intuitive de la continuité utilisée en terminale : *Une fonction est continue sur un intervalle si elle est définie sur tout cet intervalle et si sa courbe est en un seul morceau sur cet intervalle.*

Parmi les fonctions de référence, la seule qui n'est pas continue est la fonction Partie Entière.

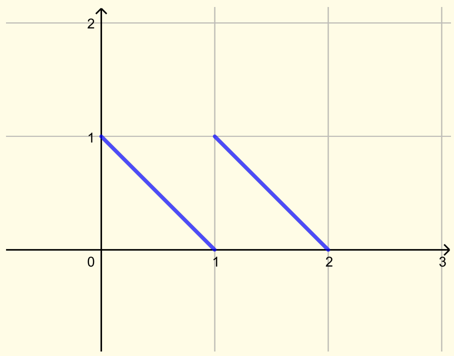
On peut aussi définir des fonctions par morceaux. Il se peut alors que la fonction obtenue ne soit pas continue.

Exemple 11.

- Soit f la fonction définie sur $[0,2]$ par :

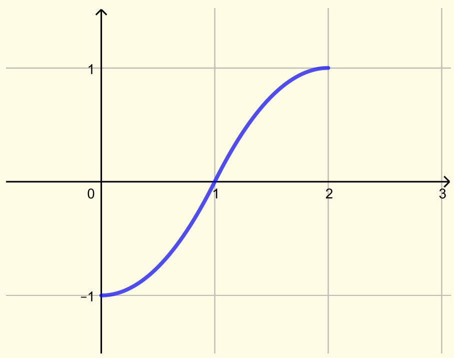
$$f(x) = \begin{cases} 1 - x \text{ si } x \in [0,1] \\ 2 - x \text{ si } x \in]1,2] \end{cases} .$$

Tracer ci-dessous la courbe de f et dire si elle a l'air d'être continue :



- Même question avec la fonction définie sur $[0,2]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ -(x-2)^2 + 1 & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases} .$$

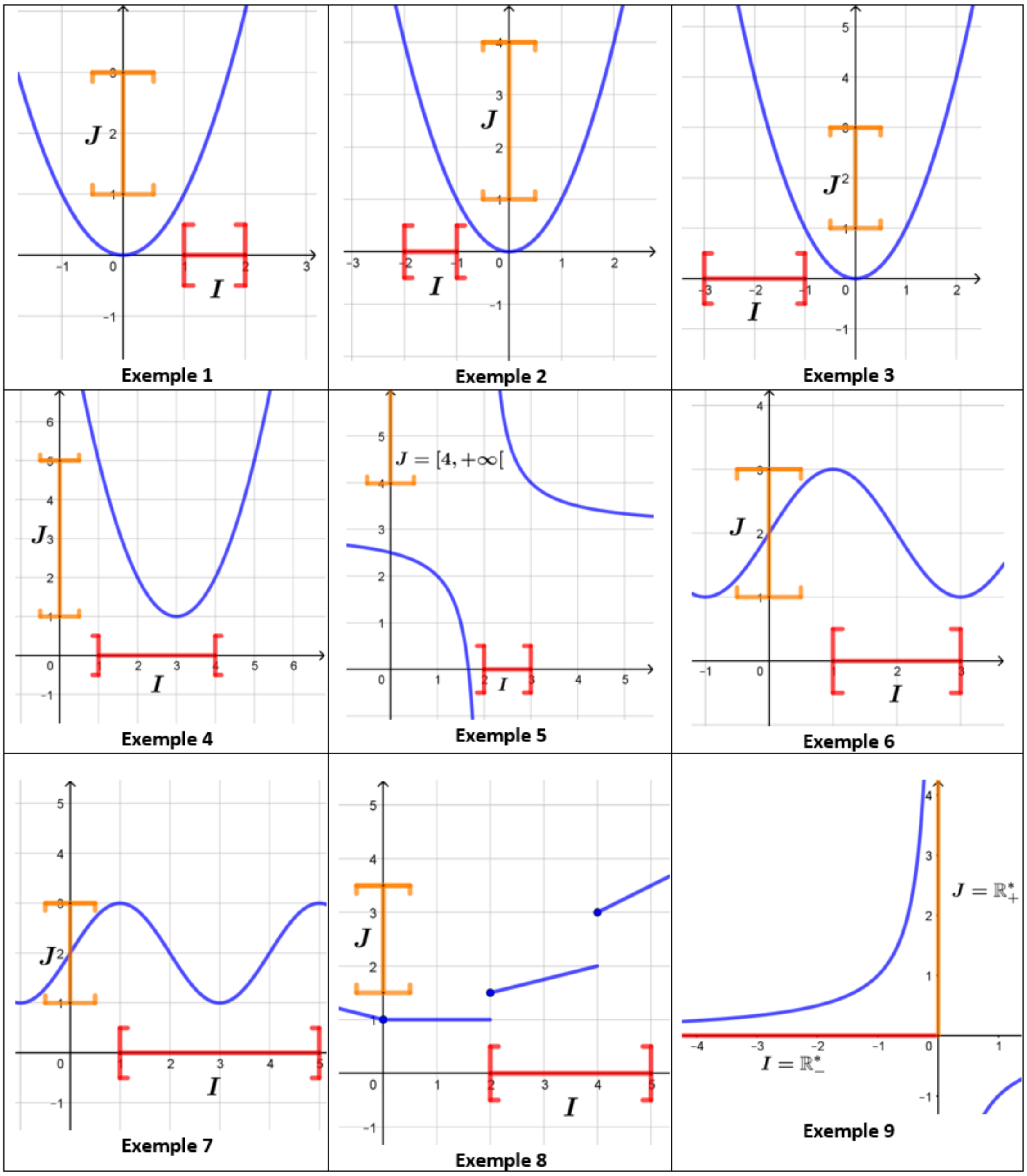


3.1.2 Bijection entre deux intervalles

Définition 8. (Bijection)
Soient f une fonction et I et J deux intervalles. On dit que f **est une bijection de** I **sur** J ou encore que f **réalise une bijection de** I **sur** J si :

- f est définie sur I.
- Pour tout $x \in I$, $f(x) \in J$.
- Tout élément de J possède **un et un seul** antécédent par f dans I.

Exemple 12. Dans les exemples ci-dessous, déterminer si la fonction f réalise une bijection de I sur J :



Exemple 1, Exemple 2, Exemple 3, Exemple 4, Exemple 5, Exemple 6, Exemple 7, Exemple 8, Exemple 9

3.1.3 Théorème de la bijection

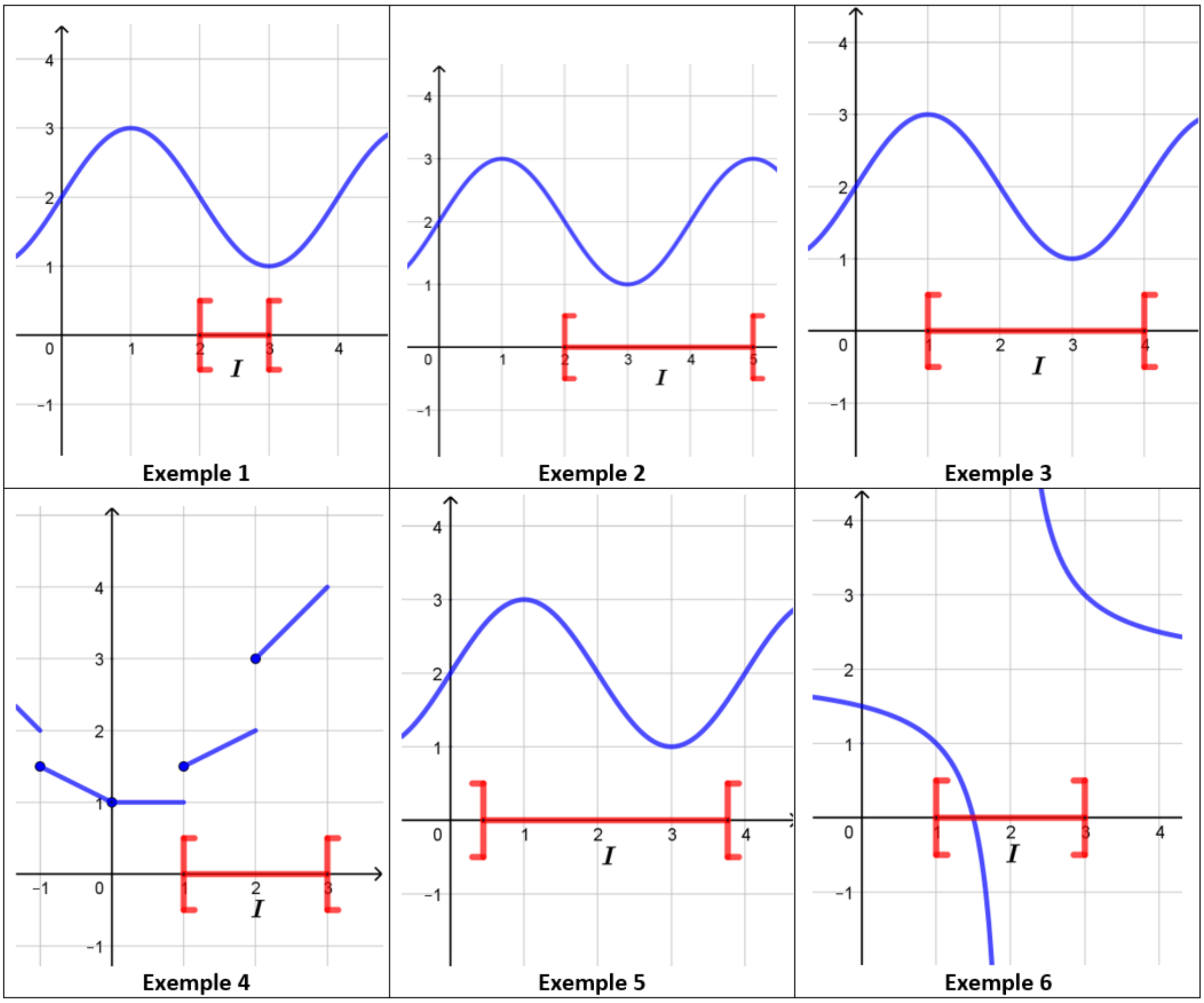
3.1.3.1 Image d'un intervalle par une fonction

Définition 9. (Image d'un intervalle par une fonction)
Soit f une fonction définie sur intervalle I.
On appelle image de I par f l'ensemble des images des éléments de I par f. On note cet ensemble $f(I)$.

$$f(I) = \Big\{ f(x) | \, x \in I \Big\}.$$

Attention ! $f(I)$ n'est donc pas un nombre : c'est un ensemble de nombres. C'est l'ensemble des images des éléments de I.

Exemple 13. Dans les exemples ci-dessous : Déterminer l'image de I par f :



Proposition 9. (Image d'une intervalle par une fonction continue.) (admis)

L'image d'un intervalle I par une fonction continue est un intervalle.

3.1.3.2 Théorème de la bijection

Proposition 10. (Théorème de la bijection) (admis)
Soit f une fonction définie sur intervalle I.

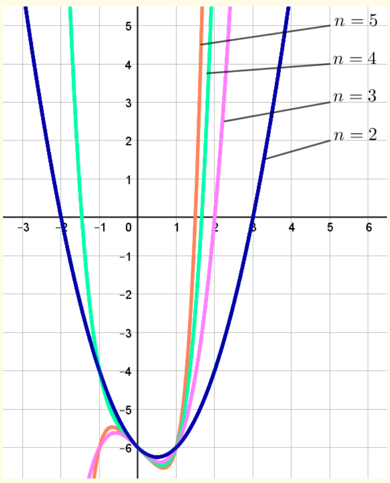
Si f est continue et strictement monotone sur I alors f réalise une bijection de I sur l'intervalle $J = f(I)$.

Remarque.
Les bornes de l'intervalle J sont alors les images des bornes de I par f ou les limites de f en ces bornes.

Exemple 14.
Montrer que l'équation $-x^3 - 2x + 1 = 0$ admet une unique solution x_0 sur $\mathbb{R}$ et que $x_0 \in]0, 1[$

Exemple 15. Pour tout entier $n \geq 2$, on définit la fonction f_n par $f_n(x) = x^n - x - 6$.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations $f_2(x) = 0$ et $f_3(x) = 0$.
2. Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution u_n sur $[1, +\infty[$
3. Sur le graphique ci-dessous, on a tracé les courbes de f_n pour n allant de 2 à 5. Conjecturez le sens de variation de la suite (u_n).



4. Démontrer que, pour tout $n \geq 2$, $f_{n+1}(u_n) > 0$. En déduire que (u_n) est décroissante.
5. En déduire que (u_n) converge vers une limite ℓ.
6. On suppose dans cette question que $\ell > 1$.
   (a) En remarquant que $u_n^n = e^{n\ln(u_n)}$, donner la limite de (u_n^n).
   (b) En déduire une contradiction.
   (c) En déduire la valeur de ℓ.

3.2 Dérivation

3.2.1 Dérivabilité d'une fonction en un point.

Définition 10. (Dérivabilité en un point)
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit $a \in I$.

On dit que f est dérivable en a lorsque le rapport $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$, défini pour $x \neq a$ et appelé **taux d'accroissement de f entre x et a**, admet une limite finie quand x tend vers a.
Ou de manière équivalente, lorsque le rapport $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$, admet une limite finie quand h tend vers 0.
Cette limite est alors appelée **nombre dérivé de f en a**, noté $f'(a)$.

Sous réserve d'existence, on a donc :

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Exemple 16.
Soit $f : x \mapsto \sqrt{x}$ et soit $a \in \mathbb{R}_+$. Étudions la dérivabilité de f en a selon les valeurs de a.

Remarque.

- Si f est dérivable en a, la courbe de f admet une tangente au point $M(a, f(a))$ de coefficient directeur $f'(a)$. Cette tangente a alors pour équation :
$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$
- Si la limite du taux d'accroissement en a est $\pm\infty$, la courbe de f possède alors une tangente verticale au point $M(a, f(a))$.

Proposition 11. (Dérivable implique continue) (admis)

Si f est dérivable en a alors f est continue en a.

Attention ! La réciproque est fausse. Par exemple, $f : x \mapsto |x|$ est continue en 0 mais pas dérivable en 0.

3.2.2 Dérivabilité sur un intervalle

Définition 11. (Dérivabilité sur un intervalle)
On dit que f est dérivable sur un intervalle I si f est dérivable en tout point de I.

Exemple 17.
La fonction $f : x \mapsto |x|$ est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$

Proposition 12. (Dérivabilité des fonctions de référence) (admis)
Toutes les fonctions de référence sont dérivables sur leur domaine de définition sauf :

- La fonction racine carré, non dérivable en 0.
- La fonction valeur absolue, non dérivable en 0.
- La fonction partie entière, non dérivable (car non continue) en tout $a \in \mathbb{Z}$.

3.2.3 Opérations sur les fonctions dérivables

3.2.3.1 Opérations algébriques

Proposition 13. (Opérations algébriques sur les fonctions dérivables.) (*Voir la preuve*)
Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

- Pour tout réel λ, λu est dérivable et : $(\lambda u)' = \lambda u'$.
- $u + v$ est dérivable et $(u + v)' = u' + v'$.
- uv est dérivable et $(uv)' = u'v + uv'$.
- si v ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{1}{v}$ est dérivable et $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = \dfrac{-v'}{v^2}$
- si v ne s'annule pas sur I alors alors $\dfrac{u}{v}$ est dérivable et $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

3.2.3.2 Dérivée d'une composée

Proposition 14. (Dérivée d'une composée) (*Voir la preuve*)
Soit u dérivable sur I et f dérivable sur $u(I)$. La fonction $f \circ u$ est dérivable sur I et on a :

$$\Big(f(u)\Big)' = u'f'(u).$$

En particulier, on a :

- $(e^u)' = u'e^u$.
- $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$.
- $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.
- $(\cos u)' = -u' \sin u$.
- $(\sin u)' = u' \cos u$.
- $(\tan u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u} = u'(1 + \tan^2 u)$

On retrouvera toutes ces formules dans le formulaire de dérivation.

4 Compléments

4.1 Composée de deux fonctions

4.1.1 Définition

Définition 12. (Composée de deux fonctions)
Soient f et g deux fonctions respectivement définies sur D et D' telles que $\forall x \in D, f(x) \in D'$.
On définit alors la fonction $g \circ f$ sur D par :

$$\forall x \in D, g \circ f(x) = g\left(f(x)\right).$$

Exemple 18. On considère la fonction $h : x \mapsto \sqrt{3x^2+1}$.
On peut décomposer h comme la succession de deux fonctions :

$$x \mapsto 3x^2+1 \mapsto \sqrt{3x^2+1}.$$

Donc, si on pose $f : x \mapsto 3x^2+1$ et $g : x \mapsto \sqrt{x}$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = g\left(f(x)\right) = g \circ f(x).$$

Remarque : ici, $f \circ g(x) = f\left(g(x)\right) = f\left(\sqrt{x}\right) = 3\left(\sqrt{x}\right)^2 + 1 = 3x+1$.

Exercice de cours 1. (*Voir la correction*)
Donner l'expression de $f \circ g$ et $g \circ f$ dans les cas suivants, après avoir préciser leur domaine de définition.

1. $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto 2x-1$.
2. $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto \sin x$.
3. $f : x \mapsto \ln x$ et $g : x \mapsto 1-\sqrt{x}$.

4.1.2 Monotonie d'une composée

Dans cette partie, on considère deux fonctions f et g respectivement définies sur des intervalles I et J et telles que $g \circ f$ existe et est définie sur I.

Proposition 15. (Critère de monotonie d'une composée) (admis)
Si f est monotone sur I et g monotone sur J, alors $g \circ f$ est monotone sur I.
Plus précisément :

- Si f et g ont même monotonie, alors $g \circ f$ est croissante.
- Si f et g n'ont pas même monotonie, alors $g \circ f$ est décroissante.

Exemple 19. On considère les fonctions $f : x \mapsto \sqrt{x}+1$ et $g : x \mapsto \dfrac{1}{x}$.
f est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et à valeur dans $[1, +\infty[$ et g est définie et décroissante sur $[1, +\infty[$ donc $g \circ f$ est définie sur $\mathbb{R}_+$ et comme f et g n'ont pas même monotonie, $g \circ f$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$

4.2 Parité et périodicité

Définition 13. (Fonctions paires et impaires)
Soit f une fonction.

On dit que f est **paire** si :

- $\mathscr{D}_f$ est centré en 0.
- Pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, $f(-x) = f(x)$.

On dit que f est **impaire** si :

- $\mathscr{D}_f$ est centré en 0.
- Pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, $f(-x) = -f(x)$.

Exemple 20.

- Les fonctions $x \mapsto x^2$; $x \mapsto x^4$; $x \mapsto x^6$, etc. sont paires.
- Les fonctions $x \mapsto x$; $x \mapsto x^3$; $x \mapsto x^5$, etc. sont impaires.
- La fonction $\cos$ est paire et la fonction $\sin$ est impaire.

Remarque. L'exemple ci-dessus donne un indice quant à l'origine des mots "paire" et "impaire"

Remarque. Une fonction peut n'être ni paire ni impaire (par exemple : $f : x \mapsto 2x + 3$)

Proposition 16. (Fonction paire et impaire.) (*Voir la preuve*)

La fonction nulle est la seule fonction qui soit paire et impaire.

Proposition 17. (Symétries des courbes des fonctions paires et impaires.) (*Voir la preuve*)
Soit f une fonction.

- f est paire si et seulement si sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- f est impaire si et seulement si sa courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Exercice de cours 2. (*Voir la correction*)

1. Étudier la parité de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{1+x^2}$.
2. Démontrer que la fonction $g : x \mapsto \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$ est impaire après avoir déterminé son domaine de définition.

Définition 14. (Fonction T-périodique)
Soit $f : x \mapsto f(x)$ et $T \in \mathbb{R}_+^*$.

$$f \text{ est dite } T\text{-périodique si : } \forall x \in \mathbb{R}, f(x+T) = f(x).$$

Exercice de cours 3.
Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \cos(5x)$ est $\dfrac{2\pi}{5}-$périodique.

Définition 15. (Fonction périodique)
Une fonction f est dite périodique si il existe un réel $T > 0$ tel que f est T-périodique.

Remarque. La courbe d'une fonction T-périodique dans un repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$ est invariante par translation de vecteur $T\vec{i}$.

Remarque. Une fonction T-périodique est aussi $2T$-périodique, $3T$-périodique, etc.

5 Preuves et corrections

Preuve de la proposition 16

Il est clair que la fonction nulle est paire et impaire.
Soit maintenant f une fonction paire et impaire sur un domaine $\mathcal{D}$ centrée en 0.
Pour tout x de $\mathcal{D}$, on a : $f(-x) = f(x)$ et $f(-x) = -f(x)$.
Donc $f(x) = -f(x)$. Ce qui équivaut à $f(x) = 0$.
(*retour à la proposition 16*)

Preuve de la proposition 17

On démontre uniquement le premier point car la démonstration de l'autre est similaire.

- Supposons que f est paire. Soit $M(x; y)$ un point de C_f. On a donc $y = f(x)$. Or $f(x) = f(-x)$ d'où $y = f(-x)$, donc le point $M'(-x; y)$ appartient à C_f. Or M' est le symétrique de M par rapport à l'axe des ordonnées.
- Supposons maintenant que C_f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
Soit $x \in \mathcal{D}$.
$M(x; f(x)) \in C_f$ donc, par symétrie, $M'(-x, f(x)) \in C_f$, d'où $f(-x) = f(x)$.

(*retour à la proposition 17*)

Solution rédigée de l'exercice de cours 2

- f est définie sur $\mathbb{R}$ qui est bien centré en 0.
- $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = \dfrac{-x}{1+(-x)^2} = \dfrac{-x}{1+x^2} = -f(x)$.

Donc f est impaire.
(*retour à l'exercice 2*)

Solution rédigée de l'exercice de cours 1

1. f et g sont définies sur $\mathbb{R}$ donc $f \circ g$ et $g \circ f$ aussi. De plus :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f \circ g(x) = f(g(x)) = f(2x-1) = (2x-1)^2.$$
et
$$\forall x \in \mathbb{R},\ g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2) = 2x^2 - 1.$$
2. f et g sont définies sur $\mathbb{R}$ donc $f \circ g$ et $g \circ f$ aussi. De plus :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f \circ g(x) = f(g(x)) = f(\sin x) = (\sin x)^2.$$
et
$$\forall x \in \mathbb{R},\ g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \sin(x^2).$$
3. f est définie sur $\mathbb{R}$, mais g est définie sur $]-\infty, 1]$.
   - $f \circ g(x)$ est définie si et seulement si : $\begin{cases} x \in D_g \\ \text{et} \\ g(x) \in D_f \end{cases}$

C'est à dire si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{l} x \leq 1 \\ \text{et} \\ \sqrt{-x+1} \in \mathbb{R} \end{array}\right.$$
$$\iff x \leq 1$$

Donc $f \circ g$ est définie sur $]-\infty, 1]$ et :

$$\forall x \in]-\infty, 1],\ f \circ g(x) = f(g(x)) = 1 - \left(\sqrt{-x+1}\right)^2 = 1 - (-x+1) = x.$$

- $g \circ f(x)$ est définie si et seulement si : $\left\{\begin{array}{l} x \in D_f \\ \text{et} \\ f(x) \in D_g \end{array}\right.$

  C'est à dire si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{l} x \in \mathbb{R} \\ \text{et} \\ 1 - x^2 \leq 1 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{l} x \in \mathbb{R} \\ \text{et} \\ -x^2 \leq 0 \end{array}\right. \qquad \text{(toujours vrai)}$$

  Donc $g \circ f$ est définie sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g \circ f(x) = g(f(x)) = \sqrt{-(1-x^2)+1} = \sqrt{-1+x^2+1} = \sqrt{x^2} = |x|.$$

(*retour à l'exercice 1*)