DM n° 1 - Révisions de TS

A rendre le jour de la rentrée !

NB : *Aux concours des écoles de commerce, vous n'aurez pas le droit à la calculatrice.* ***Nous n'utiliserons donc jamais la calculatrice en prépa*** *et vous devez commencer à vous habituer à faire sans : cela implique de connaître ses tables (jusqu'à 12), de savoir manipuler des fractions et des racines carrées et bien d'autres choses encore que vous découvrirez cette année.*
Pour ce DM ***il est donc important travailler sans calculatrice****. Votre calculatrice peut vous aider à vérifier vos résultats, mais vous devez faire tous les calculs vous même.*

Exercice 1. Calculs

1. Simplifier :
$A = \dfrac{3+\frac{1}{7}}{3-\frac{1}{7}}$ | $B = 270 \times \dfrac{88}{60} \times \dfrac{42}{45} \times \dfrac{25}{56} \times \dfrac{\pi}{15}$. | $C = \dfrac{3^{n+1} - 2 \times 3^{n-1}}{3^n}$
2. Simplifier $\dfrac{1}{\sqrt{3}-1} + \dfrac{1}{\sqrt{3}+1}$.
3. Écrire $7\sqrt{3} - \sqrt{12} + \sqrt{75} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3^5}$ sous la forme $a\sqrt{3}$, avec a entier.
4. En vous aidant du cercle trigonométrique, donner les valeurs exactes de :
$$\cos(3\pi), \quad \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right), \quad \cos\left(\frac{-7\pi}{3}\right), \quad \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right), \quad \tan\left(\frac{\pi}{4}\right), \quad \tan\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$
On rappelle que $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.
5. En observant que $\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}$, déterminer $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$. En déduire $\tan\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.
6. Exprimer en fonction de $\ln(3)$: $A = 2\ln\left(\dfrac{1}{9}\right)$, $B = \ln\left(3e^{-2}\right)$ et $C = 6\ln\sqrt{2} - \ln\left(\dfrac{2^3}{3}\right)$.
7. Développer et simplifier $D = \left(e^x - e^{-x}\right)^2 - e^{-x}\left(e^{3x} + e^{-x}\right)$.
8. Déterminer le domaine de définition et étudier le signe de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1-e^x}{x(3x+6)}$.
9. Résoudre l'inéquation $(2x-5)^2 = 4x - 1$.

Exercice 2. Calculs de dérivées
Calculer la dérivée des fonctions suivantes :
$$f(x) = \sqrt{4x^2 - 5x + 7} \quad ; \quad g(x) = x\cos(x) \quad ; \quad h(x) = \frac{1}{(x+1)^4} \quad ; \quad i(x) = \frac{e^x+1}{e^x-1}.$$

Exercice 3. Calculs d'intégrales
Calculer les intégrales suivantes :
$$I = \int_{-1}^{1} t^3 + 3t + 4\mathrm{d}t \quad ; \quad J = \int_0^1 e^{4x-6}\mathrm{d}x \quad ; \quad K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(3t)\,\mathrm{d}t \quad ; \quad L = \int_0^3 \frac{1}{2t+3}\mathrm{d}t.$$

Exercice 4. Nombres complexes

NB : Les nombres complexes ne sont pas une grosse partie du programme d'ECS et nous les verrons très rapidement. Mais ils restent important, peuvent "tomber" dans n'importe quel sujet. Il faut donc connaître les propriétés de base. Il est important au minimum de savoir faire cet exercice.

On considère les nombres complexes suivants : $z_1 = \sqrt{2}(1-i)$ et $z_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} + i$.

1. Déterminer la forme exponentielle de z_1, z_2 et $\dfrac{z_1}{z_2}$.
2. Déterminer la forme algébrique de $\dfrac{z_1}{z_2}$.
3. En déduire $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$.

Exercice 5. Les suites

Les suites représentent une partie centrale du programme d'ECS. Nous les étudierons en détail et irons beaucoup plus loin que le programme de TS. Il faut arriver en prépa en maîtrisant les fondamentaux vus en 1S ou en TS. Cet exercice permet de revoir une bonne partie du programme.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \sqrt{2u_n}.$$

1. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 < u_n \leq 2$.
   (b) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
   (c) Démontrer que la suite (u_n) est convergente. On ne demande pas la valeur de sa limite.
2. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par :

$$v_n = \ln(u_n) - \ln 2.$$

   (a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et donner son premier terme.
   (b) En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n, puis celle de u_n en fonction de n.
   (c) Déterminer la limite de (u_n).

Exercice 6. Étude de fonction

Les fonctions sont évidemment un pivot du programme d'ECS. Il faudra connaître parfaitement les propriétés des fonctions de référence et notamment :

- *Les polynômes du second degré (ou trinômes)*
- *La fonction Exponentielle.*
- *La fonction* $\ln$.
- *Les fonctions* cos *et* sin *(mais nous les reverrons ensemble).*

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{4e^x}{e^x + 7}$. On désigne par $\mathcal{C}$ la courbe de f.

1. (a) Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   (b) Démontrer que, pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{4}{1 + 7e^{-x}}$.
   (c) Démontrer que $\mathcal{C}$ admet deux asymptotes dont on précisera les équations.
2. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse $\ln 7$.

3. (a) Déterminer une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   (b) En déduire la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0, \ln 7]$.