Synthèse de la Feuille d'exercices n° 0 - Révisions et calculs

Exercice 1 : Fractions décimales

- Connaître les valeurs suivantes :
$$\frac{1}{4} = 0,25 \quad ; \quad \frac{1}{5} = 0,2$$
savoir en déduire $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{11}{5}$, etc.

- Connaître les puissances de 2 :
$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ 128,\ 256,\ 512,\ 1024.$$

- Savoir que $2^{10} = 1024$.

Exercice 2 : Fractions

- Bien choisir le dénominateur commun pour simplifier les calculs (Questions F et G).

- Bien faire attention aux fractions imbriquées : toujours commencer par calculer les fractions les plus intérieures puis utiliser la règle "diviser par un nombre (et donc une fraction) c'est multiplier par son inverse"

- Savoir appliquer la simplification suivante directement :
$$\boxed{\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{b}} = \frac{a}{c}}.$$

Exercice 3 : Racines carrées

- Se rappeler que $\boxed{\left(\sqrt{a}\right)^2 = a}$ et $\boxed{\sqrt{a^2} = |a|}$ ET NE PAS CONFONDRE CES 2 ÉGALITÉS ! ! !

- Savoir appliquer parfaitement la méthode de la quantité conjuguée (questions C et F).

- Savoir utiliser le symbole "somme" $\sum$ (question F).

- Savoir que $\sqrt{2} \approx 1,414$ et que $e \approx 2,728$

Exercices 4 et 5 : Puissances

- Connaître les formules de base :
$$\boxed{a^{n+m} = a^n a^m \quad ; \quad a^{n-m} = \frac{a^n}{a^m} \quad ; \quad \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n} \quad ; \quad a^{nm} = (a^n)^m = (a^m)^n \quad ; \quad a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}}$$

- Savoir que $(-1)^n$ vaut 1 si n est pair ou -1 si n est impair, idem avec $\frac{1}{(-1)^n}$.

Exercice 6 : Encadrer des valeurs.

- Pour encadrer des nombres positifs, je peux encadrer leurs carrés.

- Pour encadrer des fractions, je peux soit les réduire au même dénominateur, soit les réduire au même numérateur, soit les comparer en les écrivant sous la forme "nombre entier + fraction".

Exercice 7 : Encadrer et manipuler des égalités ou des inégalités

Se rappeler des règles élémentaires suivantes :
On obtient une **égalité** équivalente si on :

- Ajoute ou retranche le même nombre à chaque membre
- Multiplie chaque membre par un même nombre **non nul** –> TOUJOURS vérifier que le nombre n'est pas nul ! ! !
- Applique une fonction **strictement** croissante ou décroissante à chaque membre –> Attention : si la fonction n'est que croissante ou que décroissante ou quelconque, on n'a qu'une implication.

On obtient une **inégalité** équivalente si on :

- Ajoute ou retranche le même nombre à chaque membre
- Multiplie chaque membre par un même nombre strictement positif –> TOUJOURS vérifier que le nombre n'est pas nul et qu'on connaît son signe ! ! !
- Multiplie chaque membre par un même nombre strictement négatif en changeant le sens de l'inégalité –> TOUJOURS vérifier que le nombre n'est pas nul et qu'on connaît son signe ! ! !
- Applique une fonction **strictement** croissante –> Attention : si la fonction n'est que croissante, on n'a qu'une implication.
- Applique une fonction **strictement** décroissante en changeant le sens de l'inégalité –> Attention : si la fonction n'est que décroissante, on n'a qu'une implication.
- **Attention :** on ne peut pas appliquer une fonction aux membres d'une inéquation si on ne connaît pas le sens de variations de cette fonction. En particulier : **on ne doit surtout pas élever une inéquation au carré si on ne connaît pas le signe des deux côtés de l'inégalité !**

Dans tous les autres cas, on ne peut rien dire ! Raisonner alors par double implication si besoin.

Retenir également que :

- On peut toujours ajouter membre à membre des inégalités :
$$\text{Si } \begin{cases} a \leq b \\ \text{et} \\ a' \leq b' \end{cases} \quad \text{alors } a + a' \leq b + b'. .$$
- On peut multiplier membre à membre des inégalités à conditions que tous les membres soient positifs :
$$\text{Si } \begin{cases} a \leq b \\ \text{et} \\ a' \leq b' \\ \text{et} \\ a, b, a', b' > 0 \end{cases} \qquad \text{alors } aa' \leq bb'. .$$
- On ne peut pas soustraire, ni diviser membre à membre des inégalités ! Mais comme soustraire c'est ajouter l'opposé et diviser c'est multiplier par l'inverse donc on peut toujours essayer de se ramener aux deux règles ci-dessus.

Exercices 8 et 9 :

- Toujours penser aux identités remarquables ! !
- Pour factoriser un polynôme du troisième degré, il faut une racine évidente, sinon c'est soit dur, soit impossible. Avec une racine évidente, il faut savoir faire (question D)
- Pour les plus forts, il y a la technique de Sophie Germain, pour factoriser $a^4 + b^4$:
$$a^4 + b^4 = a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - 2a^2b^2 = \left(a^2 + b^2\right)^2 - \left(\sqrt{2}ab\right)^2 = \left(a^2 + b^2 + \sqrt{2}ab\right)\left(a^2 + b^2 - \sqrt{2}ab\right).$$

  Remarquez que si a et b sont positifs, alors cette méthode marche aussi pour factoriser $a^2 + b^2$ en l'écrivant $\sqrt{a}^4 + \sqrt{b}^4 \ldots$

Exercices 10 à 12 : Résoudre des équations ou des inéquations

- Toujours commencer par déterminer le domaine de définition !
- Réfléchir, avant de se lancer, si on ne peut pas réduire encore le domaine de définition. Par exemple dans l'équation $\sqrt{x-3} = 2 - x$ il faut avoir $x \geq 3$ pour que la racine carrée soit définie, et que $x \leq 2$ pour que $2 - x$ soit positif puisque c'est une racine carrée. Il n'y a donc pas de solution.
- S'il y a une valeur absolue avec une expression qui n'est ni clairement positive, ni clairement négative, séparer les cas selon que cette expression est positive ou négative :
  - Si $a \geq 0$, $|a| = a$
  - Si $a < 0$, $|a| = -a$.
- A la fin de la résolution, vérifier que les solutions sont bien dans le domaine de définition. De plus, si à un moment on a une implication et non une équivalence dans le raisonnement, vérifier que les solutions sont bien solutions.