Feuille d'exercices n° 1 - Généralités sur les Fonctions

1 Généralités sur les fonctions

Exercice 1. Domaines de définition
Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto x^2 - 5x$
2. $g : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x^2 + 2x - 8}$
3. $h : x \mapsto \sqrt{\ln x}$
4. $i : x \mapsto \sqrt{\dfrac{2x+6}{3x-1}}$
5. $j : x \mapsto \sqrt{x^2 + (n-1)x - n}$ où n est un entier naturel.

2 Continuité, suites implicites

Exercice 2. suite implicite - 1
On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n par : $f_n(x) = x^5 + nx - 1$.

1. Dresser le tableau de variations complet f_n (*nb : "complet" signifie "avec les limites"*).
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une unique solution u_n à l'équation $f_n(x) = 0$. Montrer ensuite que $u_n > 0$.
3. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1}(u_n) > f_{n+1}(u_{n+1})$. En déduire que la suite (u_n) est décroissante.
4. En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite $\ell \geq 0$.
5. En raisonnant par l'absurde, démontrer que $\ell = 0$.
6. Démontrer que pour tout $n \geq 1$, $\dfrac{1}{1+n} < u_n < \dfrac{1}{n}$.
7. En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\frac{1}{n}} = 1$

Exercice 3. suite implicite - 2
On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n par : $f_n(x) = x^n + x - 1$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution $x_n \in]0,1[$. Calculer x_1 et x_2.
2. Démontrer que pour tout $n > 0$, $f_{n+1}(x_n) < f_{n+1}(x_{n+1})$. En déduire le sens de variation de la suite (x_n).
3. Démontrer que la suite (x_n) converge vers une limite $\ell \in]0,1]$.
4. En raisonnant par l'absurde, démontrer que $\ell = 1$.

Exercice 4. suite implicite - 3
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_n(x) = e^x + nx^2 - 3.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution α_n. Puis prouver que si $n > 0$ alors $\alpha_n \in]0,1[$.
2. Soit $n \geq 0$. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f_{n+1}(x) > f_n(x)$.

3. En déduire que la suite (α_n) est décroissante.
4. Démontrer que la suite (α_n) converge vers une limite $\ell \geq 0$.
5. On suppose que $\ell > 0$. En déduire une contradiction.
6. Donner la valeur de ℓ.

3 Dérivation et limites

Exercice 5.
Dans chaque cas suivant :

- Donner le domaine de définition et de dérivabilité de f sans justifier.
- Déterminer la dérivée de f. Vous la factoriserez au maximum.
- (Bonus) : Dresser le tableau de variations de f.

:

1. $f : x \mapsto x \ln x$
2. $f : x \mapsto e^{x^2}$
3. $f : x \mapsto (x^2 + 3x - 2)e^{-x}$.
4. $f : x \mapsto \ln\left(x^2 + 1\right)$
5. $f : x \mapsto \dfrac{x}{\ln x}$
6. $f : x \mapsto \sqrt{e^x - 2}$
7. $f : x \mapsto \ln\left(x^2 - 1\right) - \ln\left(x^2 + 1\right)$.
8. $f : x \mapsto (x^2 + 3x - 2)e^{-x}$.
9. $f : x \mapsto x + 1 + \ln\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)$.
10. $(**)$ $f : x \mapsto e^x \ln(\sin x)$.

Exercice 6. Justifier proprement qu'une fonction est dérivable

1. Montrer que la fonction $f : x \mapsto e^{-x} - x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, puis calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que la fonction $f : t \mapsto -\dfrac{t}{\ln(1-t)}$ est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, 1[$, puis calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[$.
3. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \ln\left(\sqrt{1-x}\right)$ est dérivable sur $]-\infty, 1[$, puis calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]-\infty, 1[$.
4. Montrer que la fonction $f : t \mapsto \dfrac{t}{1-t}e^{-\frac{1}{t}}$ est dérivable sur $]0, 1[$, puis calculer $f'(t)$ pour tout $t \in]0, 1[$.
5. Montrer que la fonction $f : x \mapsto x^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, puis calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 7. Limites
Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} 3x^2 - e^x$
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} 3x^2 - e^x$
3. $\lim\limits_{x \to 0^+} x^2 \ln x + x^3$
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 \ln x + x^3$
5. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$
6. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} e^{x^2}$
7. $(*)$ (inspiré de HEC 2020)
   Déterminer la limite à droite et à gauche en 0 de la fonction u définie par $u(t) = te^{-\frac{1}{t}}$.

Exercice 8. Composée

1. Soit $f : x \mapsto x^2 - 3x + 5$ et $g : x \mapsto e^x$
   (a) Donner l'expression de $f \circ g$ et de $g \circ f$
   (b) Donner l'expression de $f \circ f$ et $g \circ g$.
2. Soit $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{x-1}$. Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f \circ f(x) = x$. En déduire $f \circ f \circ f(x)$.

Exercice 9. Parité

1. Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$ est impaire.
2. Étudier la parité des fonctions $f : x \mapsto \dfrac{1}{e^x + e^{-x}}$ et $g : x \mapsto \dfrac{1}{(e^x - e^{-x})^2}$
3. Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{(e^x + 1)^2}$ est paire.

Exercice 10. Fonctions périodiques

1. Démontrer que la fonction $u : x \mapsto \cos\left(\dfrac{4\pi x}{7}\right)$ est $\dfrac{7}{2}$-périodique.
2. Soit $\phi \in \mathbb{R}_+^*$.
   (a) Démontrer que la fonction $v : t \mapsto \cos\left(\dfrac{2t}{\phi}\right)$ est ϕ-périodique.
   (b) En déduire une fonction $\dfrac{1}{440}$-périodique.
3. Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)}$ est périodique de période 1.
4. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x, $f(x+1) = -f(x)$. Démontrer que f est 2-périodique.