Devoir Surveillé n° 1

Soignez au maximum la rédaction et la présentation et encadrez vos résultats. ***Calculatrice Interdite !***

Exercice 1 : questions courtes

1. Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :
   (a) $f : x \mapsto \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$
   (b) $g : x \mapsto \sqrt{x^2+(n+2)x+2n}$,   où n est un entier supérieur ou égal à 3.
2. Déterminer les limites suivantes :
   (a) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3+5x^2-2x-1$,
   (b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2x^3+x+1}{3x^4-3x^2+7x+37}$,
   (c) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$.
3. On considère les fonctions u et v définies sur $\mathbb{R}$ par :
$$\forall x\in\mathbb{R},\quad u(x)=\frac{1}{e^x+e^{-x}}\quad\text{et}\quad v(x)=\frac{e^x}{(1+e^x)^2}.$$
   (a) Étudier la parité de u.
   (b) Démontrer que v est paire.
4. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ par :
$$\forall t\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\},\quad h(t)=\frac{t}{1-t}e^{-\frac{1}{t}}.$$
   Montrer qu'il existe un polynôme P, que l'on précisera, tel que :
$$\forall t\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\},\quad h'(t)=\frac{1}{P(t)}e^{-\frac{1}{t}}.$$

Exercice 2

Pour tout entier naturel n non nul, on note h_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x > 0, \quad h_n(x) = x^n + 1 + \frac{1}{x^n}.$$

1. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, la fonction h_n est strictement décroissante sur $]0, 1[$ et strictement croissante sur $[1, +\infty[$.

2. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, l'équation $h_n(x) = 4$ admet une unique solution v_n **sur** $[1, +\infty[$.

3. (a) Démontrer que :

$$\forall x > 0, \quad , \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad h_{n+1}(x) - h_n(x) = \frac{(x-1)\left(x^{2n+1} - 1\right)}{x^{n+1}}.$$

   (b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ h_{n+1}(v_n) - 4 \geq 0$.

   (c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ h_{n+1}(v_n) \geq h_{n+1}(v_{n+1})$, puis que (v_n) est décroissante.

4. (a) Démontrer que la suite (v_n) converge vers un réel $\ell \geq 1$.

   (b) En supposant que $\ell > 1$, démontrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n^n = +\infty$. En déduire une contradiction.

   (c) Déterminer alors la limite ℓ.

5. (a) Démontrer que : $\forall n \geq 1,\ (v_n)^n = \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}$.

   (b) En déduire, pour tout $n \geq 1$, l'expression de v_n en fonction de n.

   (c) Retrouver alors le résultat de la question 4.c.

Question ouverte

Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln x + \dfrac{1}{x} > 0$.