DS01 - ECS1 - CORRECTION

Exercice 1

1. (a) $f(x)$ est défini ssi $\frac{1-x}{1+x} > 0$.

On étudie donc le signe de $\frac{1-x}{1+x}$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$1+x$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{1-x}{1+x}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

$$\boxed{\text{Donc } D_f =]-1, 1[}$$

(b) $g(x)$ est défini ssi $x^2 + (m+2)x + 2m \geq 0$

On étudie donc le signe de ce trinôme :

$$\Delta = (m+2)^2 - 4 \times 1 \times 2m = m^2 + 4m + 4 - 8m$$
$$= m^2 - 4m + 4$$
$$= (m-2)^2$$

$\Delta > 0$ car $m \geq 3$ (donc $m-2 \geq 1$).

Il y a donc 2 racines réelles :

$$x_1 = \frac{-(m+2) - \sqrt{(m-2)^2}}{2} = \frac{-m-2-(m-2)}{2}$$
$$= -m$$

$$x_2 = \frac{-(m+2) + \sqrt{(m-2)^2}}{2} = \frac{-m-2+m-2}{2} = -2.$$

On a donc le tableau suivant :

x	$-\infty$		$-m$		-2		$+\infty$
$x^2+(m+2)x+2m$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $\boxed{D_g =]-\infty, -m] \cup [-2, +\infty[}$

2) (a) $\lim_{x \to -\infty} x^3 + 5x^2 - 2x - 1 = \lim_{x \to -\infty} x^3 = \boxed{-\infty}$

(b) $\lim_{x \to +\infty} \frac{-2x^3 + x + 1}{3x^4 - 3x^2 + 7x + 37} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-2x^3}{3x^4}$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-2}{3x} = \boxed{0}$$

(c) $\lim_{x \to 0^+} x^x = \lim_{x \to 0^+} e^{x \ln x}$

Or $\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0$ par croissance comparée.

Donc $\lim_{x \to 0^+} e^{x \ln x} = e^0 = 1$

D'où $\boxed{\lim_{x \to 0^+} x^x = 1}$

3) a) Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$u(-x) = \frac{1}{e^{-x} + e^{-(-x)}} = \frac{1}{e^{-x}+e^{x}} = u(x)$$

Donc $\boxed{u \text{ est paire}}$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$v(-x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} = \frac{e^{-x} \times e^{2x}}{(1+e^{-x})^2 \times e^{2x}}$$

$$= \frac{e^{x}}{(1+e^{-x})^2 \times (e^{x})^2}$$

$$= \frac{e^{x}}{((1+e^{-x}) \times e^{x})^2}$$

$$= \frac{e^{x}}{(e^{x}+1)^2} = v(x)$$

Donc $\boxed{v \text{ est paire.}}$

4. h est dérivable en tant que produit, quotient et composées de fonctions dérivables.

On pose $u(t) = \frac{t}{1-t}$ et $v(t) = e^{-\frac{1}{t}}$.

alors $u'(t) = \frac{1(1-t)-(-1)t}{(1-t)^2} = \frac{1-t+t}{(1-t)^2} = \frac{1}{(1-t)^2}$

et $v'(t) = \frac{1}{t^2} e^{-\frac{1}{t}}$

Donc $h'(t) = \frac{1}{(1-t)^2} e^{-\frac{1}{t}} + \frac{\cancel{t}}{1-t} \times \frac{1}{t^{\cancel{2}}} e^{-\frac{1}{t}}$.

$$= \left(\frac{1}{(1-t)^2} + \frac{1}{t(1-t)} \right) e^{-\frac{1}{t}}$$

$$= \left(\frac{t}{(1-t)^2 t} + \frac{1-t}{t(1-t)^2} \right) e^{-\frac{1}{t}}$$

$$= \boxed{\frac{1}{t(1-t)^2} e^{-\frac{1}{t}}}.$$

On a donc la forme attendue, avec $\boxed{P(t) = t(1-t)^2}$

Remarque : P est bien un polynôme : $P(t) = t(1-2t+t^2)$
$= t - 2t^2 + t^3$.

Exercice 2

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

l'énoncé a défini a domaine de définition.

h_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$h_n'(x) = n x^{n-1} - \frac{n}{x^{n+1}}$$
$$= n\left(x^{n-1} - \frac{1}{x^{n+1}}\right)$$
$$= \boxed{n \times \frac{x^{2n} - 1}{x^{n+1}}}$$

On a $x^{n+1} > 0$.

De plus :

Si $x \in]0,1[$, $x^{2n} < 1$ et donc $x^{2n} - 1 < 0$ et donc $h_n'(x) < 0$

Si $x > 1$, $x^{2n} > 1$ et donc $x^{2n} - 1 > 0$ et donc $h_n'(x) > 0$

$\boxed{\text{$h_n$ est donc bien strictement décroissante sur $]0,1[$ et strictement croissante sur $[1,+\infty[$}}$

2) h_n est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $[1,+\infty[$ donc elle réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur $h_n([1,+\infty[)$.

$h_n(1) = 3$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} h_n = +\infty$

Donc $h_n([1,+\infty[) = [3,+\infty[$.

$4 \in [3,+\infty[$ donc l'équation $h_n(x) = 4$ admet une unique solution, v_n, sur $[1,+\infty[$.

3) a) Soit $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

$$h_{n+1}(x) - h_n(x) = x^{n+1} + 1 + \frac{1}{x^{n+1}} - \left(x^n + 1 + \frac{1}{x^n}\right)$$
$$= \frac{x^{2n+2}}{x^{n+1}} + \frac{1}{x^{n+1}} - \frac{x^{2n+1}}{x^{n+1}} - \frac{x}{x^{n+1}}$$
$$= \frac{x^{2n+2} - x^{2n+1} + 1 - x}{x^{n+1}}$$
$$= \frac{x^{2n+1}(x-1) - (x-1)}{x^{n+1}}$$
$$= \boxed{\frac{(x-1)(x^{2n+1} - 1)}{x^{n+1}}}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On a $h_n(v_n) = 4$, donc :

$$h_{n+1}(v_n) - 4 = h_{n+1}(v_n) - h_n(v_n) = \frac{(v_n - 1)(v_n^{2n+1} - 1)}{v_n^{n+1}}$$

d'après la question 3.a et parce que $v_n > 0$.

or $v_n \geq 1$ donc $v_n - 1 \geq 0$ et $v_n^{2n+1} \geq 1$ d'où $v_n^{2n+1} - 1 \geq 0$.

Ainsi, on a bien $\boxed{h_{n+1}(v_n) - 4 \geq 0}$

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On a $h_{n+1}(v_n) - 4 \geq 0$

$\iff h_{n+1}(v_n) \geq 4$

$\iff h_{n+1}(v_n) \geq h_{n+1}(v_{n+1})$ $\quad$ (car $4 = h_{n+1}(v_{n+1})$)

$\iff \boxed{v_n \geq v_{n+1}}$ par stricte croissance de h_{n+1}.

Donc <u>(v_n) est bien décroissante</u>

4\. a. (v_n) est décroissante et minorée par 1 donc elle converge vers une limite $\ell \geq 1$

b\. On suppose que $\ell > 1$.

$$\lim_{n \to +\infty} v_n^n = \lim_{n \to +\infty} e^{n \ln(v_n)}$$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln(v_n) = \ln(\ell) > 0$ car $\ell > 1$.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} n \ln(v_n) = +\infty$

D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{n \ln(v_n)} = +\infty$. On a donc bien $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} v_n^n = +\infty.}$

On sait par ailleurs que $\forall n \geq 1$, $h_n(v_n) = 4$

$\iff \forall n \geq 1$, $v_n^n + 1 + \dfrac{1}{v_n^n} = 4$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n^n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{v_n^n} = 0$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n^n + 1 + \dfrac{1}{v_n^n} = +\infty$.

$\boxed{\text{Contradiction}}$

c\. On a vu que l'hypothèse "$\ell > 1$" mène à une contradiction.

Or $\ell \geq 1$.

Donc $\boxed{\ell = 1.}$

5\. (a) v_n est solution de l'équation $x^n + 1 + \dfrac{1}{x^n} = 4$

On a donc :

$$v_n^n + 1 + \frac{1}{v_n^n} = 4 \iff \frac{(v_n^n)^2 + v_n^n + 1}{v_n^n} = 4$$

$$\iff (v_n^n)^2 + v_n^n + 1 = 4 v_n^n$$

$$\iff (v_n^n)^2 - 3 v_n^n + 1 = 0$$

v_n^n est donc solution de l'équation $x^2 - 3x + 1 = 0$

$\Delta = (-3)^2 - 4 = 5 > 0$ donc il y a 2 solutions :

$x_1 = \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}$

or $\sqrt{5} > \sqrt{4}$ donc $-\sqrt{5} < -2$ donc $3 - \sqrt{5} < 1$ d'où $\dfrac{3 - \sqrt{5}}{2} < \dfrac{1}{2}$

Or $\alpha_n^n > 1$ puisque $\alpha_n > 1$ donc $\boxed{\alpha_n = \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}}$

(5.b) On a $v_n^n = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $v_n > 0$

donc $v_n = \sqrt[n]{\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}}$

ou encore : $\boxed{v_n = \left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{\frac{1}{n}}}$

(5.c) On a $v_n = \left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)}$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n}\ln\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right) = 0$

Donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = e^0 = 1}$

Question ouverte

On étudie la fonction $f : x \longmapsto \ln x + \dfrac{1}{x}$.

f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonctions dérivables

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x-1}{x^2}$

On a donc le tableau :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
x^2		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

$f(1) = \ln(1) + 1 = 1$

D'après ce tableau, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) \geq 1 > 0$

Donc, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln x + \dfrac{1}{x} > 0}$