Feuille d'exercices 01- compléments – sujets de concours

EDHEC 2017 – Voie S

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. On considère la fonction f_n définie par :

$$\forall x \in [0,1]\ ,\ f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k$$

1. (a) Compléter la fonction **Scilab** suivante pour qu'elle renvoie la valeur de $f_n(x)$ à l'appel de `f(x,n)` , où x et n sont donnés par l'utilisateur.

```
function y=f(x,n)
   y=sum(------)
endfunction
```

   (b) Transformer, pour $x \neq 1$, l'expression de $f_n(x)$ puis en déduire une deuxième façon de déclarer `f` , en complétant la déclaration suivante où la fonction est toujours nommée `f`.

```
function y=f(x,n)
   if x==1 then y=------
           else y=------
   end
endfunction
```

2. Montrer que l'équation $f_n(x) = 1$, d'inconnue $x \in [0,1]$, possède une unique solution α_n dans $[0,1]$.
3. (a) Montrer que $f_{n+1}(\alpha_n) \geq 1$ et en déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
   (b) En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.
4. (a) Déterminer α_2 puis vérifier que $0 \leq \alpha_2 \leq 1$.
   (b) Utiliser les variations de la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour établir que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n^{n+1} = 0$.
   (c) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = \dfrac{1}{2}$.
5. On suppose que f_n a été déclarée (cf question 1). On considère les commandes supplémentaires suivantes :

```
n=input('entrer la valeur de n : ')
x=0
while f(x,n)<1
x=x+0.001
end
disp(x)
```

Quel est le lien entre le résultat affiché et α_n ?

ECRICOME 2015 – Voie S – Exercice 2 (sans les 3 dernières questions Scilab)

1. On note pour tout $x \in I = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$:

$$f(x) = \frac{1}{3}(2\sin(x) + \tan(x)) \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{3\sin(x)}{2+\cos(x)}.$$

   (a) Factoriser le polynôme $P(X) = 2X^3 - 3X^2 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.

   (b) On pose $u(x) = f(x) - x$ pour tout $x \in I$.
   Justifier que u est dérivable sur I et que pour tout $x \in I$, $u'(x) = \dfrac{P(\cos(x))}{3\cos^2(x)}$.

   (c) En déduire les variations de u sur I.

   (d) On pose $v(x) = x - g(x)$ pour tout $x \in I$.
   Justifier qu'il existe un polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$, de degré deux, tel que pour tout $x \in I$, $v'(x) = \dfrac{Q(\cos(x))}{(2+\cos x)^2}$.

   (e) En déduire les variations de v sur I.

   (f) Montrer que :

$$\forall x \in I,\ g(x) < x < f(x).$$

2. (a) En utilisant le fait que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$, calculer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

   (b) Déduire de la question 1(f) un encadrement de π.

3. On pose pour tout entier naturel n,

$$a_n = \sin\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right) \quad \text{et} \quad b_n = \cos\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right).$$

   (a) Justifier que pour tout réel θ,

$$\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2(\theta),$$

   et en déduire que pour tout entier naturel n,

$$a_{n+1} = \sqrt{\frac{1-b_n}{2}} \quad (*) \qquad \text{et} \quad b_{n+1} = \sqrt{\frac{1+b_n}{2}} \quad (**)$$

   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$9 \times 2^n \frac{a_n}{2+b_n} < \pi < 2^n\left(2a_n + \frac{a_n}{b_n}\right).$$

   (c) Justifier que les deux termes de l'encadrement précédent tendent vers π quand n tend vers l'infini.