

DM n° 2 - Equations et Fonctions

A rendre vendredi 25 septembre

Exercice 1. Quelques dérivées simples

Donner les dérivées des fonctions suivantes. Vous simplifierez le résultat au maximum.

1. $f : x \mapsto \frac{1}{x^{2n}}$

2. $g : x \mapsto \frac{1}{\ln x}$

3. $h : x \mapsto (\ln x)^2$

4. $i : x \mapsto (\ln x)^{2020}$

Exercice 2. (in)équations

1. Résoudre l'équation $\sqrt{2x-5} - x + 4 = 0$

2. Résoudre l'inéquation $|x^2 - 3x| \leq x - 2$.

Exercice 3. Étude de fonction

On définit la fonction φ ("phi") par :

$$\varphi(x) = \frac{\ln(1-x)}{\ln x}.$$

1. Déterminer le domaine de définition de φ , qu'on notera \mathcal{D} .
2. Déterminer le tableau de signes de φ sur le domaine \mathcal{D} .
3. Déterminer la limite en 0^+ et en 1^- de φ . Pour la limite en 1^- , on pourra poser $X = 1 - x$.
4. Justifier que φ est dérivable et montrer que pour tout $x \in \mathcal{D}$:

$$\varphi'(x) = \frac{-x \ln x - (1-x) \ln(1-x)}{x(1-x)(\ln x)^2}.$$

5. (a) Démontrer que pour tout $t \in]0, 1[$, $t \ln t < 0$.
(b) En déduire, pour $x \in]0, 1[$, le signe de $(1-x) \ln(1-x)$.
6. En déduire le signe de φ' et dresser le tableau de variations **complet** de φ .
7. Dans un repère orthonormé, tracer l'allure de la courbe de φ .