Programme de colle n° 1
Semaine du 21/09/2019

La colle de mathématiques se déroulera selon le schéma suivant :

- Une ou deux questions de cours portant sur les connaissances attendues.
- Une démonstration ou un exercice préparé choisi dans la liste ci-dessous.
- Un exercice libre, non préparé, portant sur les compétences attendues.

Bonnes révisions !

1 Connaissances attendues

1. **Fonctions usuelles - propriétés générales**
   - Savoir classer x^n et x^m avec $n < m$ selon les valeurs de x (Proposition 3 du chap. 1)
   - Savoir tracer l'allure de la courbe de la fonction $x \mapsto x^n$ selon que n est pair ou impair.
   - Savoir tracer l'allure de la courbe de la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ selon que n est pair ou impair.
   - Savoir tracer l'allure de la courbe de la fonction Exponentielle et de la fonction ln. Savoir que ces courbes sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la droite d'équation $y = x$.
   - Savoir que lorsque a est un réel strictement positif et b réel quelconque, $a^b = e^{b \ln a}$.
2. **Dérivation**
   - Connaître la formule de l'équation de la tangente en un point à la courbe d'une fonction dérivable (remarque après l'exemple 16 du chap. 1)
   - Savoir que $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0.
   - **Connaître par cœur** toutes les formules de dérivation (propositions 13 et 14 du chap. 1).
3. **Composée**
   - Savoir ce que signifie $f \circ g$. (On attends que vous répondiez que $f \circ g(x) = f(g(x))$)
   - Savoir que en général $f \circ g \neq g \circ f$.
   - Connaître le critère de monotonie d'une composée (proposition 15 du chap. 1).
4. **Fonctions paires et impaires et fonctions T-périodiques**
   - Connaître la définition d'une fonction paire et d'une fonction impaire et savoir que la seule fonction paire et impaire est la fonction nulle.
   - Connaître la propriété de symétrie des courbes des fonctions paires et impaires (proposition 17 du chap. 1).
   - Connaître la définition d'une fonction T-périodique. (définition 14 du chap. 1.)
5. **Limites usuelles - limites de suites**
   - connaître la limite de (n^α) dans le cas $\alpha > 0$ et $\alpha < 0$.
   - Connaître la limite (ou l'absence de limite) de (q^n) dans les 3 cas ($q > 1$, $q \in]-1, 1[$ et $q \leq -1$). Et pour $q = 1$, savoir quoi dire.
   - **Croissances comparées :**
     - Connaître les limites de croissances comparées, donc savoir donner la liste ci-dessous :
       * $\forall \alpha > 0,\ \forall \beta > 0,\ \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^\alpha}{(\ln n)^\beta} = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha} = 0$.
       * $\forall q > 1,\ \forall \alpha > 0,\ \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{q^n}{n^\alpha} = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^\alpha}{q^n} = 0$.

  * $\forall q \in]-1,1[,\ \forall \alpha > 0,\ \lim\limits_{n \to +\infty} q^n n^\alpha = 0.$
  * $\forall q > 1,\ \forall \beta > 0,\ \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{q^n}{(\ln n)^\beta} = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{(\ln n)^\beta}{q^n} = 0.$
  * $\forall q \in]-1,1[,\ \forall \alpha > 0,\ \lim\limits_{n \to +\infty} q^n (\ln n)^\beta = 0.$

6. **Limites usuelles de fonctions**

   - Connaître parfaitement les limites suivantes :
     - Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n$, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n$ (selon que n est pair ou impair) et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^n}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^n}$.
     - Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x}$ et lorsque n est impair $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt[n]{x}$.
     - Savoir donner les limites aux bornes de leur de domaine des fonctions Exp et ln (donc connaître $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x$, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x$, $\lim\limits_{x \to 0} \ln x$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x$).
   - **Croissances comparées**
     Connaître les limites de croissances comparées suivantes :
     - $\forall \alpha > 0,\ \forall \beta > 0,\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^\alpha}{(\ln x)^\beta} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0.$
     - $\forall \alpha > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \lim\limits_{x \to 0} x^\alpha (\ln x)^n = 0.$
     - $\forall \alpha > 0,\ \forall \gamma > 0,\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^\alpha}{e^{\gamma x}} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{\gamma x}}{x^\alpha} = +\infty.$
     - $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall \gamma > 0,\quad \lim\limits_{x \to 0} x^\alpha e^{\gamma x} = 0.$

7. **Valeur absolue**

   - Connaître la définition de $|x|$ pour $x \in \mathbb{R}$.
   - Connaître l'interprétation de $|a-b|$.
   - Connaître les règles de calcul avec une valeur absolue :
     (a) $|ab|$, $\left|\dfrac{a}{b}\right|$, $\left|\dfrac{1}{a}\right|$, $|a^n|$
     (b) $|a+b| \leq |a| + |b|$ (Inégalité triangulaire)
     (c) $|a-b| \geq \Big||a| + |b|\Big|$ (Inégalité triangulaire 2)
   - Savoir que $|a|^2 = a^2$ et savoir qu'un nombre est toujours inférieur ou égal à sa valeur absolue.
   - Savoir pour pour deux réels a et b : $|a| = |b| \iff a = b$ ou $a = -b$.
   - Savoir que si b est un réel positif, $|a| \leq b \iff -b \leq a \leq b$ et $|a| \geq b \iff a \leq -b$ ou $a \geq b$.
   - Savoir qu'il n'est pas possible de traduire facilement $|a| \leq |b|$.

8. **Partie Entière**

   - Connaître la définition de la partie entière d'un réel x, $\lfloor x \rfloor$.
   - Connaître les deux encadrements suivants, valables pour tout réel x :
     (a) $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.
     (b) $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$.

2 Compétences attendues (basique en noir, avancé en rouge)

1. Savoir déterminer un domaine de définition. Notamment savoir refaire l'exemple 2 du chap. 1 et les questions 2, 3 et 4 de l'exercice 1 de la feuilles d'exercices n° 1.

2. Savoir déterminer simplement la limite en $+\infty$ ou en $-\infty$ d'un polynôme ou d'une fonction rationnelle (exemples 8 et 9 du chap. 1).

3. Savoir calculer une dérivée en utilisant les formules de dérivées. Savoir notamment retrouver les dérivées l'exercice 5 de la feuilles d'exercices n° 1 (sans forcément savoir justifier le domaine de dérivation).

4. Savoir donner l'expression de $f \circ g$ à partir de celles de f et de g. Savoir notamment refaire l'exercice de cours n° 1 du chap. 1.

5. Savoir prouver qu'une fonction est paire ou impaire. Savoir refaire notamment l'exercice de cours n° 2 du chap. 1 ($f : x \mapsto \dfrac{x}{1+x^2}$ et $g : x \mapsto \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$).

6. Savoir prouver que la seule fonction paire et impaire est la fonction nulle.

7. Savoir prouver qu'une fonction est T-périodique, T étant donné. Savoir notamment refaire l'exercice de cours 3 du chap. 1.

8. Savoir effectuer un changement de variables pour calculer une limite. Savoir refaire tous les exemples donnés en cours :

   (a) $\lim\limits_{x \to 1^-} (1-x)\ln(1-x)$.

   (b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\ln x)^2 - \ln(x^3) + 1$

   (c) $\lim\limits_{x \to 0^+} x e^{\frac{1}{x}}$.

9. Savoir utiliser $a^b = e^{b \ln a}$ (si $a > 0$) pour :

   - Savoir Déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.
   - Étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = x^x$ (Ecricome 1996).
     (a) Déterminer la limite de f en 0 et en $+\infty$.
     (b) Justifier que f est dérivable et la dériver pour étudier ses variations.

10. Savoir utiliser les croissances comparées pour calculer des limites. Savoir notamment refaire les exemples du cours suivants :

    - *A compléter !*

    Savoir aussi refaire les 6 premières questions de l'exercice 1 de la feuilles d'exercices n° 1 - compléments.

11. Savoir résoudre une inéquation simple avec une valeur absolue. Savoir notamment refaire l'exercice 7 de la feuilles d'exercices n° 1 - compléments.

12. **Équations avec valeur absolue (suite)**

    - Savoir résoudre une équation se ramenant à $|a| = b$ avec $b > 0$. (exemple du cours : $|x - 4| = 5$)
    - Savoir résoudre une équation se ramenant à $|a| = |b|$ (question 5 exercice 7 de la feuilles d'exercices n° 1 - compléments).
    - Savoir résoudre une équation avec valeurs absolues en procédant par disjonction des cas : c'est la question 6 de l'exercice 7 de la feuilles d'exercices n° 1 - compléments.

13. **Inéquations avec valeur absolue**

    - Savoir résoudre une inéquation se ramenant à $|a| \leq b$ avec b positif (c'est la question 1 de l'exercice 9 de la feuilles d'exercices n° 1 - compléments) ou se ramenant à $|a| \geq b$ (exemple 3 du cours).
    - Savoir résoudre une inéquation avec valeurs absolues en procédant par disjonction des cas : c'est la question 2 de l'exercice 9 de la feuilles d'exercices n° 1 - complémentset c'est de toute façon l'exercice préparé n° 1.

3 Exercices préparés et démonstrations

Exercice préparé 1

Résoudre l'inéquation $|x+2| \leq |-2x+5|$.

Exercice préparé 2

On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n par : $f_n(x) = x^5 + nx - 1$.

1. Dresser le tableau de variations complet f_n (*nb : "complet" signifie "avec les limites"*).
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une unique solution u_n à l'équation $f_n(x) = 0$. Montrer ensuite que $u_n > 0$.
3. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1}(u_n) > f_{n+1}(u_{n+1})$. En déduire que la suite (u_n) est décroissante.

Exercice préparé 3

1. Factoriser le polynôme $P(X) = 2X^3 - 3X^2 + 1$.
2. En déduire son tableau de signes.
3. Quel est le signe de $P\left(cos\left(\pi/5\right)\right)$?

Démonstration

Démontrer l'inégalité triangulaire.