Sujets de colle n° 1
Semaine du 21/09/2019

1 Questions de cours

1. (a) Soit n et m deux entiers naturels non nuls tels que $n < m$ et $x \in \mathbb{R}$. Classer x^n et x^m avec $n < m$ selon les valeurs de x.
   Réponse attendue : Proposition 3 du chap. 1
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Tracer l'allure de la courbe de la fonction $x \mapsto x^n$ selon que n est pair ou impair.
   Réponse attendue : Voir Cours.
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Tracer l'allure de la courbe de la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ selon que n est pair ou impair.
   Réponse attendue : Voir Cours.

2. (a) Tracer l'allure de la courbe de la fonction Exponentielle et de la fonction ln.
   Réponse attendue : nous l'avons fait en cours. Il faut aussi remarquer que ces courbes sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la droite d'équation $y = x$.
   (b) Soit a est un réel strictement positif et b réel quelconque. Donner "l'écriture exponentielle" de a^b.
   Réponse attendue : $a^b = e^{b \ln a}$.
   (c) Donner la formule de l'équation de la tangente en un point a à la courbe d'une fonction d'une fonction f, dérivable en a.
   Réponse attendue : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

3. (a) Donner le domaine de définition et le domaine de dérivabilité de $x \mapsto \sqrt{x}$.
   Réponse attendue : Domaine de def : $\mathbb{R}_+$, domaine de dérivabilité : $\mathbb{R}_+^*$.
   (b) Compléter la troisième colonne des tableaux ci-dessous :

N°	$f(x)$	$f'(x)$
1	x^n $n \in \mathbb{Z}^*$	
2	$\frac{1}{x^n}$ $n \in \mathbb{Z}^*$	
3	e^x	
4	$\ln x$	
5	$\cos x$	
6	$\sin x$	

N°	$f(x)$	$f'(x)$
1	x^3	
1	x^3	
2	x^{-3}	
3	$\sqrt{x}$	
4	$x^{\frac{3}{2}}$	
5	$x^{-\frac{3}{2}}$	
6	$\frac{1}{x^3}$	
7	$\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$	

   Réponse attendue : :

N°	$f(x)$	$f'(x)$
1	x^n $n \in \mathbb{Z}^*$	nx^{n-1}
2	$\frac{1}{x^n}$ $n \in \mathbb{Z}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
3	e^x	e^x
4	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
5	$\cos x$	$-\sin x$
6	$\sin x$	$\cos x$

N°	$f(x)$	$f'(x)$
1	x^3	$3x^2$
1	x^3	$3x^2$
2	x^{-3}	$-3x^{-4}$
3	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
4	$x^{\frac{3}{2}}$	$\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$
5	$x^{-\frac{3}{2}}$	$-\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}$
6	$\frac{1}{x^3}$	$-\frac{3}{x^4}$
7	$\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{-\frac{3}{2}}{x^{\frac{5}{2}}}$

Tourner la page

4. Compléter la quatrième colonne des tableaux ci-dessous :

N°	Opération	Fonction	Dérivée
1	Somme	$u+v$	
2	Produit par une constante	ku	
3	Produit	uv	
4	Puissance ($n \in Z^*$)	u^n	
5	Inverse d'une puissance entière ($n \in Z^*$)	$\frac{1}{u^n}$	
6	Inverse	$\frac{1}{u}$	
7	Quotient	$\frac{u}{v}$	

N°	Opération	Fonction	Dérivée
8	Racine carrée	$\sqrt{u}$	
9	Exponentielle	e^u	
10	Logarithme	$\ln u$	
11	Sinus	$\cos u$	
12	Cosinus	$\sin u$	
13	Composée	$f(u)$	

Réponse attendue :

N°	Opération	Fonction	Dérivée
1	Somme	$u+v$	$u'+v'$
2	Produit par une constante	ku	ku'
3	Produit	uv	$u'v+v'u$
4	Puissance ($n \in Z^*$)	u^n	$nu'u^{n-1}$
5	Inverse d'une puissance entière ($n \in Z^*$)	$\frac{1}{u^n}$	$\frac{-nu'}{u^{n+1}}$
6	Inverse	$\frac{1}{u}$	$\frac{-u'}{u^2}$
7	Quotient	$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-v'u}{v^2}$

N°	Opération	Fonction	Dérivée
8	Racine carrée	$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
9	Exponentielle	e^u	$u'e^u$
10	Logarithme	$\ln u$	$\frac{u'}{u}$
11	Sinus	$\cos u$	$-u'\sin u$
12	Cosinus	$\sin u$	$u'\cos u$
13	Composée	$f(u)$	$u'f'(u)$

5. **Composée**

   (a) Expliquer ce que signifie $f \circ g$. A-t-on toujours $f \circ g = g \circ f$?
   repa $f \circ g(x) = f(g(x))$. Non, on n'a pas $f \circ g = g \circ f$ en général.

   (b) Énoncer le critère de monotonie d'une composée.
   repa voir proposition 15 du chap. 1.

6. **Fonctions paires et impaires et fonctions T-périodiques**

   (a) Donner la définition d'une fonction paire et d'une fonction impaire.(**Réponse attendue :** : déf donné dans le cours). Une fonction peut-elle être ni paire ni impaire ? (**Réponse attendue :** Oui.) Peut-elle être paire et impaire ? (**Réponse attendue :** Oui, c'est alors la fonction nulle.) Donner la propriété de symétrie des courbes des fonctions paires et impaires (repa proposition 17 du chap. 1.)

   (b) Donner la définition d'une fonction T-périodique. (repa définition 14 du chap. 1.)

7. **Limites usuelles - limites de suites**

   (a) Donner la limite quand $n \to +\infty$ de (n^α) dans le cas $\alpha > 0$ et $\alpha < 0$.
   Réponse attendue : voir Cours.

   (b) Donner la limite quand $n \to +\infty$ de (q^n) dans selon les valeurs de q.
   Réponse attendue : voir Cours.

   (c) Énoncer toutes les limites de croissances comparées des suites.
   Réponse attendue :

   - $\forall \alpha > 0,\ \forall \beta > 0,\ \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n^\alpha}{(\ln n)^\beta} = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha} = 0.$

- $\forall q > 1,\ \forall \alpha > 0,\ \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{q^n}{n^\alpha} = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^\alpha}{q^n} = 0.$
- $\forall q \in]-1,1[,\ \forall \alpha > 0,\ \lim\limits_{n \to +\infty} q^n n^\alpha = 0.$
- $\forall q > 1,\ \forall \beta > 0,\ \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{q^n}{(\ln n)^\beta} = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{(\ln n)^\beta}{q^n} = 0.$
- $\forall q \in]-1,1[,\ \forall \alpha > 0,\ \lim\limits_{n \to +\infty} q^n (\ln n)^\beta = 0.$

Limites usuelles de fonctions

8. Donner les limites suivantes :
   - Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n$, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n$ (selon que n est pair ou impair) et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^n}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^n}$.
   Réponse attendue : voir cours.
   - Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x}$ et lorsque n est impair $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt[n]{x}$.
   Réponse attendue : voir cours.
9. Donner les limites aux bornes de leur de domaine des fonctions Exp et ln.
   Réponse attendue : voir cours.

Croissances comparées

10. Énoncer toutes les limites de croissance comparée des fonctions vues dans le cours.
    Réponse attendue :
    - $\forall \alpha > 0,\ \forall \beta > 0,\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^\alpha}{(\ln x)^\beta} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0.$
    - $\forall \alpha > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \lim\limits_{x \to 0} x^\alpha (\ln x)^n = 0.$
    - $\forall \alpha > 0,\ \forall \gamma > 0,\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^\alpha}{e^{\gamma x}} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{\gamma x}}{x^\alpha} = +\infty.$
    - $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall \gamma > 0,\quad \lim\limits_{x \to 0} x^\alpha e^{\gamma x} = 0.$
11. **Valeur absolue**
    (a) Donner la définition de $|x|$ pour $x \in \mathbb{R}$.
    Réponse attendue : Voir cours.
    (b) Donner l'interprétation de $|a-b|$.
    Réponse attendue : $|a-b|$ est la distance entre a et b.
    (c) Donner les règles de calcul avec une valeur absolue.
    Réponse attendue :
    i. $|ab| = |a||b|$, $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$, $\left|\dfrac{1}{a}\right| = \dfrac{1}{|a|}$, $|a^n| = |a|^n$
    ii. $|a+b| \leq |a| + |b|$ (Inégalité triangulaire)
    iii. $|a-b| \geq \Big||a| + |b|\Big|$ (Inégalité triangulaire 2)
12. **Valeur absolue - suite**
    (a) Simplifier $|a|^2$ où $a \in \mathbb{R}$ (**Réponse attendue :** $|a|^2 = a^2$, mais valable uniquement si $a \in \mathbb{R}$.) Que peut-on dire d'un nombre de sa valeur absolue ? (**Réponse attendue :** un nombre est toujours inférieur ou égal à sa valeur absolue.)
    (b) **Compléter :** pour deux réels a et b : $|a| = |b| \iff$
    Réponse attendue : $|a| = |b| \iff a = b$ ou $a = -b$.
    (c) **Compléter :** Si b est un réel positif, $|a| \leq b \iff$ et $|a| \geq b \iff$.
    Réponse attendue : $|a| \leq b \iff -b \leq a \leq b$ et $|a| \geq b \iff a \leq -b$ ou $a \geq b$.
    (d) Peut-on traduire facilement $|a| \leq |b|$ avec $a, b \in \mathbb{R}$? (**Réponse attendue :** : non).
13. **Partie Entière**

(a) Donner la définition et la notation de la partie entière d'un réel x.
Réponse attendue : Voir cours.

(b) Donner les deux encadrements du cours avec la partie entière, valables pour tout réel x.
Réponse attendue : :

i. $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.

ii. $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$.

2 Exercices préparés et démonstrations

Exercice préparé 1

Résoudre l'inéquation $|x+2| \leq |-2x+5|$.

Exercice préparé 2

On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n par : $f_n(x) = x^5 + nx - 1$.

1. Dresser le tableau de variations complet f_n (*nb : "complet" signifie "avec les limites"*).
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une unique solution u_n à l'équation $f_n(x) = 0$. Montrer ensuite que $u_n > 0$.
3. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1}(u_n) > f_{n+1}(u_{n+1})$. En déduire que la suite (u_n) est décroissante.

Exercice préparé 3

1. Factoriser le polynôme $P(X) = 2X^3 - 3X^2 + 1$.
2. En déduire son tableau de signes.
3. Quel est le signe de $P\left(cos\left(\pi/5\right)\right)$?

Démonstration

Démontrer l'inégalité triangulaire.

3 Exercices

Vous les découvrirez en colle ! !